Алгебра 3

И.В. Аржанцев и С.Н. Федотов
Независимый Московский университет
осень 2013

Задачи к лекции 5

Задача 1. Найдите минимальный базис Гребнера идеала

$$(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2,\ x_1 + x_2 - x_3,\ x_2 + x_3^2)$$

относительно

a) лексикографического порядка;
b) однородного лексикографического порядка.

Задача 2. Приведите пример двух многочленов $f_1, f_2 \in \mathbb{K}[x_1, x_2]$, для которых минимальный базис Гребнера идеала (f_1, f_2) относительно лексикографического порядка содержит более двух элементов.

Задача 3. Пусть $NP(f)$ – многогранник Ньютона многочлена f. Докажите, что $NP(fg) = NP(f) + NP(g)$ для любых ненулевых многочленов f и g.

Задача 4. Пусть старшие члены многочленов f и g взаимно просты. Докажите, что S-многочлен $S(f, g)$ можно редуцировать к нулю относительно набора $\{f, g\}$. В частности, любой набор многочленов с попарно взаимно простыми старшими членами является базисом Гребнера.

Задача 5. Решите систему полиномиальных уравнений

$$\begin{cases} x_1x_2 = x_3^2 + x_3 \\ x_1^2 = x_1 + x_2x_3 \\ x_1x_3 = x_2^2 + x_2. \end{cases}$$

Задача 6. Найдите базис алгебры

$$A = \mathbb{K}[x, y, z]/(x^2 + y^2 + z^2,\ x + y - z,\ y + z^2)$$

как $\mathbb{K}$-векторного пространства и опишите умножение в этом базисе.

Задача 7. Пусть A – подалгебра в $\mathbb{K}[x_1, x_2]$, порожденная $y_1 = x_1$, $y_2 = x_1x_2$, $y_3 = x_1x_2^2$. Тогда

$$A \ \cong\ \mathbb{K}[Y_1, Y_2, Y_3]/I,$$

где I – ядро гомоморфизма алгебр многочленов

$$\mathbb{K}[Y_1, Y_2, Y_3] \to \mathbb{K}[x_1, x_2], \quad Y_1 \to y_1,\ Y_2 \to y_2,\ Y_3 \to y_3.$$

Найдите конечный базис идеала I.