Алгебра 3

И.В. Аржанцев и С.Н. Федотов
Независимый Московский университет
осень 2013

Задачи к лекции 6

Задача 1. Пусть $X = Z(f_1, \ldots, f_k) \subseteq \mathbb{A}^n$ и $Y = Z(g_1, \ldots, g_s) \subseteq \mathbb{A}^m$ — алгебраические подмножества и

$$\phi\colon \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^m, \quad \phi((x_1, \ldots, x_n)) = (h_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, h_m(x_1, \ldots, x_n))$$

— морфизм.

a) Найдите алгоритм, проверяющий, содержится ли образ $\phi(X)$ в Y.
b) Если это так, найдите алгоритм, проверяющий, является ли морфизм $\phi|_X\colon X \to Y$ доминантным.

Задача 2. Пусть $\mathbb{K}$ — поле и $h_1, \ldots, h_m$ — многочлены из $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$. Рассмотрим идеал I алгебры $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m]$, порожденный $y_1 - h_1, \ldots, y_m - h_m$. Докажите, что $I \cap \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n] = \{0\}$.

Задача 3. Пусть $\mathbb{K}$ — поле и $f, f_1, \ldots, f_k$ — многочлены из $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$. Предположим, что f лежит в идеале $(f_1, \ldots, f_k)$. Укажите алгоритм для нахождения таких многочленов $h_1, \ldots, h_k \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$, что $f = f_1 h_1 + \ldots + f_k h_k$.

Задача 4. Пусть $\mathbb{K}$ — поле и $I = (\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j,\ i = 1, \ldots, d)$ — идеал в $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$, порожденный d линейно независимыми линейными формами. Ненулевая линейная форма l из I называется *контуром*, если множество переменных, которые входят в l с ненулевым коэффициентом, минимально по включению. Пусть

$$D[j_1, \ldots, j_d] = \det \begin{pmatrix} a_{1j_1} & \ldots & a_{1j_d} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{dj_1} & \ldots & a_{dj_d} \end{pmatrix}.$$

Докажите, что

a) контуры — это в точности (с точностью до скаляра) ненулевые линейные формы

$$L_{k_1,\ldots,k_{d-1}}(x_1, \ldots, x_n) := D[k_1, \ldots, k_{d-1}, 1]\, x_1 + D[k_1, \ldots, k_{d-1}, 2]\, x_2 + \ldots + D[k_1, \ldots, k_{d-1}, n]\, x_n,$$

где $1 \le k_1 < \ldots < k_{d-1} \le n$;
b) для любого мономиального порядка, минимальный базис Гребнера идеала I состоит из d контуров.
c) Постройте универсальный базис Гребнера идеала I.

Задача 5. Пусть $\mathbb{K}$ — поле, $\mathbb{K}[x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{23}]$ — алгебра многочленов на пространстве (2×3)-матриц

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \end{pmatrix},$$

и I — идеал, порожденный минорами

$$D_{12} := x_{11}x_{22} - x_{12}x_{21}, \quad D_{13} = x_{11}x_{23} - x_{13}x_{21}, \quad D_{23} = x_{12}x_{23} - x_{13}x_{22}.$$

Докажите, что $\{D_{12}, D_{13}, D_{23}\}$ — универсальный базис Гребнера идеала I.