Алгебра 3

И.В. Аржанцев и С.Н. Федотов
Независимый Московский университет
осень 2013

Задачи к лекции 7

Задача 1. Пусть $\mathbb{K}$ – произвольное поле и $f, h_1, \ldots, h_m \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$. Рассмотрим базис Гребнера G идеала $I = (y_1 - h_1, \ldots, y_m - h_m)$ кольца $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m]$ относительно лексикографического порядка. Докажите, что многочлен f лежит в подалгебре $\mathbb{K}[h_1, \ldots, h_m]$ тогда и только тогда, когда нормальная форма $g := N_G(f)$ лежит в $\mathbb{K}[y_1, \ldots, y_m]$. В этом случае $f = g(h_1, \ldots, h_m)$.

Задача 2. Пусть R – кольцо и I, J – идеалы в R. Определим IJ как идеал в R, порожденный элементами вида fg, $f \in I$, $g \in J$. Тогда $IJ \subseteq I \cap J$, но равенство имеет место не всегда. Далее,

$$\mathrm{rad}(IJ) = \mathrm{rad}(I \cap J) = \mathrm{rad}(I) \cap \mathrm{rad}(J).$$

Если идеалы I и J радикальны, то идеал $I \cap J$ также радикален, а IJ может оказаться не радикальным.

Задача 3. Докажите, что $\mathbb{R}$-алгебры $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ и $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$ изоморфны.

Задача 4. Пусть M_i, $i \in \mathbb{Z}$, и N – модули над кольцом R и $\phi_i \colon M_i \to M_{i+1}$ – гомоморфизмы R-модулей.

a) Докажите, что для любого i существует единственный гомоморфизм $\overline{\phi_i} \colon M_i \otimes_R N \to M_{i+1} \otimes_R N$, такой что $\overline{\phi_i}(x \otimes y) = \phi_i(x) \otimes y$ для всех $x \in M_i$, $y \in N$.

b) Напомним, что последовательность

$$M_1 \xrightarrow{\phi_1} M_2 \xrightarrow{\phi_2} \ldots \xrightarrow{\phi_n} M_{n+1}$$

называется точной, если $\mathrm{Im}(\phi_i) = \mathrm{Ker}(\phi_{i+1})$ для всех $i = 1, \ldots, n-1$. Докажите, что если последовательность $M_1 \xrightarrow{\phi_1} M_2 \xrightarrow{\phi_2} M_3 \longrightarrow 0$ точна, то точна и последовательность

$$M_1 \otimes_R N \xrightarrow{\overline{\phi_1}} M_2 \otimes_R N \xrightarrow{\overline{\phi_2}} M_3 \otimes_R N \longrightarrow 0.$$

c) Приведите пример, где $0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{\phi_1} M_2$ точна, а

$$0 \longrightarrow M_1 \otimes_R N \xrightarrow{\overline{\phi_1}} M_2 \otimes_R N$$

не точна.

Задача 5. Пусть X, Y, P – аффинные многообразия и $\pi_1 \colon P \to X$, $\pi_2 \colon P \to Y$ – морфизмы. Предположим, что для любого аффинного многообразия Z и любых морфизмов $\phi_1 \colon Z \to X$, $\phi_2 \colon Z \to Y$ найдется единственный такой морфизм $\phi \colon Z \to P$, что $\phi_1 = \pi_1 \circ \phi$ и $\phi_2 = \pi_2 \circ \phi$:

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, "\pi_1"'] \arrow[dr, "\pi_2"] & \\ X & Z \arrow[l, "\phi_1"] \arrow[u, "\phi"] \arrow[r, "\phi_2"'] & Y \end{tikzcd}$$

Докажите, что существует изоморфизм $j \colon P \to X \times Y$, такой что $\pi_1 = p_1 \circ j$ и $\pi_2 = p_2 \circ j$, где $p_1 \colon X \times Y \to X$ и $p_2 \colon X \times Y \to Y$ – проекции.