# Алгебра 3

И.В. Аржанцев и С.Н. Федотов
Независимый Московский университет
осень 2013

## Задачи к лекции 8

**Задача 1.** Пусть $X = \cup_i X_i$ и $Y = \cup_j Y_j$ – разложение аффинных многообразий $X$ и $Y$ на неприводимые компоненты. Докажите, что $X \times Y = \cup_{i,j}(X_i \times Y_j)j$ – разложение на неприводимые компоненты многообразия $X \times Y$.

**Задача 2.** Пусть $A$ и $B$ – алгебры без нильпотентов (соот. без делителей нуля) над алгебраически замкнутым полем $\mathbb{K}$. Докажите, что алгебра $A \otimes_{\mathbb{K}} B$ не содержит нильпотентов (соот. делителей нуля). Верны ли эти утверждения, если поле $\mathbb{K}$ не является алгебраически замкнутым?

**Задача 3.** Докажите, что для аффинного многообразия $X = Z(x_1x_2 \dots x_n - 1) \subseteq \mathbb{A}^n$ не существует такого аффинного многообразия $Y$, что $X \cong \mathbb{A}^1 \times Y$.

**Задача 4.** Пусть $X = \mathbb{A}^n$, $Y = S = \mathbb{A}^1$, $\tau_1 \colon X \to S$, $(x_1, \dots, x_n) \mapsto f(x_1, \dots, x_n)$, и $\tau_2 \colon Y \to S$, $y \to y^2$. Для каких многочленов $f \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ расслоенное произведение $X \times_S Y$ неприводимо?

**Задача 5.** (Линейная двойственность Гейла)

a) Пусть $V$ – векторное пространство над полем $\mathbb{K}$, порожденное векторами $v_1, \dots, v_k \in V$. Докажите, что существуют такое $\mathbb{K}$-векторное пространство $W$ и такие вектора $w_1, \dots, w_k \in W$, что выполнены следующие условия:

(1) $v_1 \otimes w_1 + \dots + v_k \otimes w_k = 0$ в $V \otimes_{\mathbb{K}} W$;

(2) если $U$ – векторное пространство над $\mathbb{K}$ , $u_1, \dots, u_k \in U$ и $v_1 \otimes u_1 + \dots + v_k \otimes u_k = 0$ в $V \otimes_{\mathbb{K}} U$, то существует такое линейное отображение $\phi \colon W \to U$, что $\phi(w_i) = u_i$, $i = 1, \dots, k$;

(3) если $U$ – векторное пространство над $\mathbb{K}$, $u_1, \dots, u_k \in U$ и $u_1 \otimes w_1 + \dots + u_k \otimes w_k = 0$ в $U \otimes_{\mathbb{K}} W$, то существует такое линейное отображение $\psi \colon V \to U$, что $\psi(v_i) = u_i$, $i = 1, \dots, k$.

b) Пусть $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^2$, $k = 4$ и $v_1 = (1, 0), v_2 = (0, 1), v_3 = (-1, 1), v_4 = (0, -1)$. Постройте пространство $W$ и вектора $w_1, \dots, w_4 \in W$ явно.