Упражнения к Лекции 6. Поле Дирака

Упражнения идут по ходу главы 3 Пескина Шредера, каждое упражнение оценивается в 2.5 балла.

3.1 Лоренц инвариантность волновых уравнений.

◯ **1.** Исходя из формулы для генераторов вращения $J^{\mu\nu} = i(x^\mu \partial^\nu - x^\nu \partial^\mu)$, показать, что для них выполняются следующие коммутационные соотношения алгебры Лоренца

$$[J^{\mu\nu}, J^{\rho\sigma}] = i(g^{\nu\rho} J^{\mu\sigma} - g^{\mu\rho} J^{\nu\sigma} - g^{\nu\sigma} J^{\mu\rho} + g^{\mu\sigma} J^{\nu\rho}).$$

3.2 Уравнение Дирака.

◯ **2.** Показать, что генераторы алгебры Лоренца в представлении гамма-матриц: $S^{\mu\nu} = \frac{i}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$, удовлетворяет коммутационным соотношениям алгебры Лоренца:

$$[S^{\mu\nu}, S^{\rho\sigma}] = i(g^{\nu\rho} S^{\mu\sigma} - g^{\mu\rho} S^{\nu\sigma} - g^{\nu\sigma} S^{\mu\rho} + g^{\mu\sigma} S^{\nu\rho}).$$

◯ **3.** Покажите, что в киральном представлении гамма-матриц: $\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}$, генераторы алгебры Лоренца $S^{\mu\nu}$, даются выражениями

$$S^{0i} = \frac{i}{4}[\gamma^0, \gamma^i] = -\frac{i}{2}\begin{pmatrix} \sigma^i & 0 \\ 0 & -\sigma^i \end{pmatrix}, \quad S^{ij} = \frac{i}{4}[\gamma^i, \gamma^j] = \frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}\begin{pmatrix} \sigma^k & 0 \\ 0 & \sigma^k \end{pmatrix} \equiv \frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}\Sigma^k.$$

◯ **4.** Покажите, что $[\gamma^\mu, S^{\rho\sigma}] = (\mathcal{J}^{\rho\sigma})^\mu_\nu \gamma^\nu$, где $(\mathcal{J}^{\rho\sigma})_{\alpha\beta} = i(\delta^\rho_\alpha \delta^\sigma_\beta - \delta^\rho_\beta \delta^\sigma_\alpha)$.

◯ **5.** Покажите, что верно равенство

$$(1 + \frac{i}{2}\omega_{\rho\sigma} S^{\rho\sigma})\gamma^\mu (1 - \frac{i}{2}\omega_{\rho\sigma} S^{\rho\sigma}) = (1 - \frac{i}{2}\omega_{\rho\sigma}\mathcal{J}^{\rho\sigma})^\mu_\nu \gamma^\nu.$$

◯ **6.** Проверьте, что $(S^{ij})^\dagger = S^{ij}$, $(S^{0i})^\dagger = -S^{0i}$, $\quad (S^{ij})^\dagger \gamma^0 = \gamma^0 S^{ij}$, $\quad (S^{0i})^\dagger \gamma^0 = -\gamma^0 S^{0i}$.

◯ **7.** Покажите, что $\bar\psi\psi$ есть лоренцевский скаляр, а $\bar\psi\gamma^\mu\psi$ лоренцевский вектор, где $\bar\psi \equiv \psi^\dagger\gamma^0$.

◯ **8.** Покажите, что уравнения Эйлера-Лагранжа для $\bar\psi$ (или $\psi^\dagger$) для лагранжиана $\mathcal{L}_{\text{Dirac}} = \bar\psi(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi$ приводят к уравнению Дирака $(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi(x) = 0$.

3.2 Вейлевские спиноры.

◯ **9.** Проверьте, что для левого ψ_{L} и правого ψ_{R} вейлевских спиноров, при бесконечно мылых вращениях $\boldsymbol{\theta}$ ($\theta_i = \frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}\omega_{jk}$) и бустах $\boldsymbol{\beta}$ ($\beta_i = \omega_{0i}$), преобразования имеют вид

$$\psi_{\text{L}} \to (1 - i\boldsymbol{\theta}\cdot\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} - \boldsymbol{\beta}\cdot\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2})\psi_L,$$

$$\psi_{\text{R}} \to (1 - i\boldsymbol{\theta}\cdot\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} + \boldsymbol{\beta}\cdot\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2})\psi_R.$$

○ **10.** Докажите тождество $\sigma^2\boldsymbol{\sigma}^* = -\boldsymbol{\sigma}\sigma^2$, и покажите, что величина $\sigma^2\psi_{\mathrm{L}}^*$ преобразуется подобно правому спинору.

3.3 Решения уравнения Дирака для свободных частиц.

○ **11.** Покажите, что $\exp\left[\begin{pmatrix} 0 & \eta \\ \eta & 0 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}\eta & \mathrm{sh}\eta \\ \mathrm{sh}\eta & \mathrm{ch}\eta \end{pmatrix}$, и

$$\exp\left[\begin{pmatrix} -\eta\sigma^3/2 & 0 \\ 0 & \eta\sigma^3/2 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}(\eta/2) - \sigma^3\mathrm{sh}(\eta/2) & 0 \\ 0 & \mathrm{ch}(\eta/2) + \sigma^3\mathrm{sh}(\eta/2) \end{pmatrix}.$$

○ **12.** Докажите, что $(p\cdot\sigma)(p\cdot\bar{\sigma}) = p^2 = m^2$, где $\sigma = (1, \boldsymbol{\sigma})$ и $\bar{\sigma} = (1, -\boldsymbol{\sigma})$.

○ **13*.** Найдите собственные числа и общий вид матрицы $\sqrt{p\cdot\sigma}$.

○ **14.** Проверить, что $\psi(x) = \begin{pmatrix} \sqrt{p\cdot\sigma}\xi \\ \sqrt{p\cdot\bar{\sigma}}\xi \end{pmatrix} e^{-ipx}$ есть решение уравнения Дирака.

○ **15.** Покажите, что $\bar{u}u = 2m\xi^\dagger\xi$, где $u(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{p\cdot\sigma}\xi \\ \sqrt{p\cdot\bar{\sigma}}\xi \end{pmatrix}$, а $\bar{u}(p) = u^\dagger(p)\gamma^0$.

○ **16.** Покажите, что $\bar{v}^r(p)v^s(p) = -2m\delta^{rs}$, $\quad v^{r\dagger}(p)v^s(p) = 2E_{\mathbf{p}}\delta^{rs}$, где $v^s(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{p\cdot\sigma}\eta^s \\ -\sqrt{p\cdot\bar{\sigma}}\eta^s \end{pmatrix}$ и $\eta^{r\dagger}\eta^s = \delta^{rs}$, $s, r = 1, 2$.

○ **17.** Проверьте, что $\bar{u}^r(p)v^s(p) = \bar{v}^r(p)u^s(p) = 0$ и $u^{r\dagger}(\mathbf{p})v^s(-\mathbf{p}) = v^{r\dagger}(-\mathbf{p})u^s(\mathbf{p}) = 0$.

○ **18.** Докажите формулу $\sum\limits_{s=1,2}\xi^s\xi^{s\dagger} = \mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, где $\xi^{r\dagger}\xi^s = \delta^{rs}$ и покажите, что $\sum\limits_s u^s(p)\bar{u}^s(p) = \gamma\cdot p + m$, а $\sum\limits_s v^s(p)\bar{v}^s(p) = \gamma\cdot p - m$

3.4 Матрицы Дирака и билинейные формы Дирака.

○ **19.** Проверьте, что $\gamma^5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = -\frac{i}{4!}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho\gamma_\sigma$, и $\varepsilon^{0123} = -\varepsilon_{0123} = 1$.

○ **20.** Проверьте, что $\gamma^{\mu\nu\rho} = i\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\gamma_\sigma\gamma^5$, где $\gamma^{\mu\nu\rho} = \gamma^{[\mu}\gamma^\nu\gamma^{\rho]} = \frac{1}{3!}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho - \gamma^\nu\gamma^\mu\gamma^\rho - \gamma^\mu\gamma^\rho\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\mu + \gamma^\rho\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\rho\gamma^\nu\gamma^\mu)$.

○ **21.** Проверьте, что $(\gamma^5)^\dagger = \gamma^5$, $\quad (\gamma^5)^2 = 1$, $\quad \{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0$.

○ **22.** Покажите, что $\partial_\mu j^\mu = 0$, $\partial_\mu j^{\mu 5} = 2im\bar{\psi}\gamma^5\psi$, где $j^\mu(x) = \bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)$, $\quad j^{\mu 5}(x) = \bar{\psi}(x)\gamma^\mu\gamma^5\psi(x)$, учитывая уравнения движения.

○ **23.** Покажите, что $j^\mu(x)$ и $j^{\mu 5}(x)$ являются нетеровскими токами, соответствующими преобразованиям $\psi(x) \to e^{i\alpha}\psi(x)$ и $\psi(x) \to e^{i\alpha\gamma^5}\psi(x)$.

○ **24.** Используя тождество Фирца $(\sigma^\mu)_{\alpha\beta}(\sigma_\mu)_{\gamma\delta} = 2\varepsilon_{\alpha\gamma}\varepsilon_{\beta\delta}$, покажите, что

$$(\bar{u}_{1R}\sigma^\mu u_{2R})(\bar{u}_{3R}\sigma_\mu u_{4R}) = -(\bar{u}_{1R}\sigma^\mu u_{4R})(\bar{u}_{3R}\sigma_\mu u_{2R}).$$

$$(\bar{u}_{1L}\bar{\sigma}^\mu\sigma^\nu\bar{\sigma}^\lambda u_{2L})(\bar{u}_{3L}\bar{\sigma}_\mu\sigma_\nu\bar{\sigma}_\lambda u_{4L}) = 16(\bar{u}_{1L}\bar{\sigma}^\mu u_{2L})(\bar{u}_{3L}\bar{\sigma}_\mu u_{4L}).$$

3.5 Квантование Дираковского поля.

○ **25.** Покажите, что плотность Дираковского гамильтониана дается выражением $\mathcal{H} = \bar{\psi}(-i\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\nabla} + m)\psi$.

○ **26.** Покажите, что для данного "неправильного"дираковского поля

$$\psi(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_\mathbf{p}}} e^{i\mathbf{px}} \sum_{s=1,2} \left(a^s_\mathbf{p} u^s(\mathbf{p}) + b^s_{-\mathbf{p}} v^s(-\mathbf{p}) \right)$$

выполняются соотношения $[\psi(\mathbf{x}), \psi^\dagger(\mathbf{y})] = \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \times \mathbf{1}_{4\times4}$. Используйте коммутационные соотношения $[a^r_{\boldsymbol{p}}, a^{s\dagger}_{\boldsymbol{q}}] = [b^r_{\boldsymbol{p}}, b^{s\dagger}_{\boldsymbol{q}}] = (2\pi)^3\delta^{(3)}(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{q})\delta^{rs}$.

○ **27.** Покажите, что для волновой функции из пункта 26, гамильтониан дается выражением

$$H = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sum_s \left(E_\mathbf{p} a^{s\dagger}_\mathbf{p} a^s_\mathbf{p} - E_\mathbf{p} b^{s\dagger}_\mathbf{p} b^s_\mathbf{p} \right).$$

○ **28.** Покажите, что $[\psi_a(x), \bar{\psi}_b(y)] = (i\not{\partial}_x + m)_{ab}[\phi(x), \phi(y)]$, где $\phi(x), \phi(y)$ — поля Клейна-Гордона, а ψ_a и $\bar{\psi}_b$ поля из пункта 26 в Гейзенберговском представлении.

○ **29.** Покажите, что для "правильно"квантованного Дираковского поля

$$\psi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_\mathbf{p}}} \sum_s \left(a^s_\mathbf{p} u^s(p) e^{-ip\cdot x} + b^{s\dagger}_\mathbf{p} v^s(p) e^{ip\cdot x} \right);$$

$$\bar{\psi}(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_\mathbf{p}}} \sum_s \left(b^s_\mathbf{p} \bar{v}^s(p) e^{-ip\cdot x} + a^{s\dagger}_\mathbf{p} \bar{u}^s(p) e^{ip\cdot x} \right),$$

гамильтониан дается выражением

$$H = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sum_s \left(E_\mathbf{p} a^{s\dagger}_\mathbf{p} a^s_\mathbf{p} + E_\mathbf{p} b^{s\dagger}_\mathbf{p} b^s_\mathbf{p} \right),$$

где операторы антикоммутируют как $\{a^r_{\boldsymbol{p}}, a^{s\dagger}_{\boldsymbol{q}}\} = \{b^r_{\boldsymbol{p}}, b^{s\dagger}_{\boldsymbol{q}}\} = (2\pi)^3\delta^{(3)}(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{q})\delta^{rs}$.

○ **30.** Покажите, что унитарный оператор $U(\Lambda)$, преобразует $a^s_\mathbf{p}$ по правилу $U(\Lambda)a^s_p U^{-1}(\Lambda) = \sqrt{\frac{E_{\Lambda p}}{E_p}} a^s_{\Lambda p}$.

○ **31.** Рассматривая маленький поворот вокруг оси z, покажите, что $\Lambda_{\frac{1}{2}} \approx 1 - \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}S^{\mu\nu} = 1 - \frac{i}{2}\theta\Sigma^3$.

○ **32*.** Оператор углового момента для поля Дирака равен $\boldsymbol{J} = \int d^3x \psi^\dagger(-i\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{\nabla} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\Sigma})\psi$. Упростите отдельно выражение для спиновой i компоненты $J^i_{\text{spin}} = \int d^3x \psi^\dagger(\frac{1}{2}\Sigma^i)\psi$ оператора углового момента и затем для орбитальной $J^i_{\text{orbit}} = \int d^3x \psi^\dagger(-i(\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{\nabla})^i)\psi$. Покажите, что оператор $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{J}_{\text{orbit}} + \boldsymbol{J}_{\text{spin}}$ уничтожает вакуум, то есть $\boldsymbol{J}|0\rangle = 0$. Покажите, что $\boldsymbol{J} a^{s\dagger}_0|0\rangle = \sum\limits_r \left(\xi^{r\dagger}\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}\xi^s\right) a^{r\dagger}_0|0\rangle$.

○ **33.** Покажите, что запаздывающая функция Грина для уравнения Дирака есть $S^{ab}_R(x - y) = (i\not{\partial}_x + m)_{ab} D_R(x - y)$, где $D_R(x - y)$ запаздывающая функция Грина для уравнения Клейна-Гордона.

◯ **34.** Покажите, что $\not{\partial}\not{\partial} = \partial^2$.

3.6 Дискретные симметрии в теории Дирака.

◯ **35.** Проверьте, что все величины: $\bar{\psi}\psi,\ \bar{\psi}\gamma^\mu\psi,\ i\bar{\psi}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]\psi,\ \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi,\ i\bar{\psi}\gamma^5\psi$ являются эрмитовыми.

◯ **36.** Покажите, что

$$\gamma^0\gamma^\mu\gamma^0 = \begin{cases} +\gamma^\mu, & \mu = 0, \\ -\gamma^\mu, & \mu = 1, 2, 3. \end{cases}$$

◯ **37.** Проверьте, что

$$T\bar{\psi}\gamma^\mu\psi T = \begin{cases} +\bar{\psi}\gamma^\mu\psi(-t, \mathbf{x}), & \mu = 0 \\ -\bar{\psi}\gamma^\mu\psi(-t, \mathbf{x}), & \mu = 1, 2, 3. \end{cases}$$

◯ **38.** Найдите чему равно преобразование зарядового сопряжения для биллинейных форм:

$$C\bar{\psi}\psi C,\ C\bar{\psi}\gamma^\mu\psi C,\ Ci\bar{\psi}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]\psi C,\ C\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi C,\ Ci\bar{\psi}\gamma^5\psi C.$$