Упражнения к Лекции 6. Поле Дирака

Решения

Упражнения идут по ходу главы 3 Пескина Шредера, каждое упражнение оценивается в 2.5 балла.

3.1 Лоренц инвариантность волновых уравнений.

◯ **1.** Исходя из формулы для генераторов вращения $J^{\mu\nu} = i(x^\mu \partial^\nu - x^\nu \partial^\mu)$, показать, что для них выполняются следующие коммутационные соотношения алгебры Лоренца

$$[J^{\mu\nu}, J^{\rho\sigma}] = i(g^{\nu\rho} J^{\mu\sigma} - g^{\mu\rho} J^{\nu\sigma} - g^{\nu\sigma} J^{\mu\rho} + g^{\mu\sigma} J^{\nu\rho}).$$

Решение: Используем, что $\partial_\mu x^\nu = \delta_\mu^\nu$, откуда $\partial^\mu x^\nu = g^{\mu\nu}$, имеем

$$\begin{aligned}
[J^{\mu\nu}, J^{\rho\sigma}] &= -[(x^\mu \partial^\nu - x^\nu \partial^\mu), (x^\rho \partial^\sigma - x^\sigma \partial^\rho)] = -[x^\mu \partial^\nu, x^\rho \partial^\sigma] + ... = \\
&= -g^{\nu\rho} x^\mu \partial^\sigma + g^{\mu\sigma} x^\rho \partial^\nu + ... = ig^{\nu\rho}(ix^\mu \partial^\rho + ...) + ig^{\mu\sigma}(... - ix^\rho \partial^\nu) + ... = \\
&= i(g^{\nu\rho} J^{\mu\sigma} - g^{\mu\rho} J^{\nu\sigma} - g^{\nu\sigma} J^{\mu\rho} + g^{\mu\sigma} J^{\nu\rho}),
\end{aligned} \tag{0.1}$$

что и тербовалось показать. ◯

3.2 Уравнение Дирака.

◯ **2.** Показать, что генераторы алгебры Лоренца в представлении гамма-матриц: $S^{\mu\nu} = \frac{i}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$, удовлетворяет коммутационным соотношениям алгебры Лоренца:

$$[S^{\mu\nu}, S^{\rho\sigma}] = i(g^{\nu\rho} S^{\mu\sigma} - g^{\mu\rho} S^{\nu\sigma} - g^{\nu\sigma} S^{\mu\rho} + g^{\mu\sigma} S^{\nu\rho}).$$

Решение: Используем, что $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$, имеем

$$\begin{aligned}
[S^{\mu\nu}, S^{\rho\sigma}] &= -\frac{1}{16}[\gamma^\mu\gamma^\nu, \gamma^\rho\gamma^\sigma] + ... = -\frac{1}{16}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma - \gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma^\mu\gamma^\nu) + ... = \\
&= -\frac{1}{16}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma + \gamma^\rho\gamma^\mu\gamma^\sigma\gamma^\nu - 2g^{\mu\sigma}\gamma^\rho\gamma^\nu) + ... = \\
&= -\frac{1}{16}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma - \gamma^\mu\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma^\nu + 2g^{\mu\rho}\gamma^\sigma\gamma^\nu - 2g^{\mu\sigma}\gamma^\rho\gamma^\nu) + ... = \\
&= -\frac{1}{16}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma + \gamma^\mu\gamma^\rho\gamma^\nu\gamma^\sigma - 2g^{\nu\sigma}\gamma^\mu\gamma^\rho + 2g^{\mu\rho}\gamma^\sigma\gamma^\nu - 2g^{\mu\sigma}\gamma^\rho\gamma^\nu) + ... = \\
&= -\frac{1}{16}(2g^{\nu\rho}\gamma^\mu\gamma^\sigma - 2g^{\nu\sigma}\gamma^\mu\gamma^\rho + 2g^{\mu\rho}\gamma^\sigma\gamma^\nu - 2g^{\mu\sigma}\gamma^\rho\gamma^\nu) + ... = \\
&= i(g^{\nu\rho} S^{\mu\sigma} - g^{\mu\rho} S^{\nu\sigma} - g^{\nu\sigma} S^{\mu\rho} + g^{\mu\sigma} S^{\nu\rho})
\end{aligned} \tag{0.2}$$

◯

◯ **3.** Покажите, что в киральном представлении гамма-матриц: $\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}$, генераторы алгебры Лоренца $S^{\mu\nu}$, даются выражениями

$$S^{0i} = \frac{i}{4}[\gamma^0, \gamma^i] = -\frac{i}{2}\begin{pmatrix} \sigma^i & 0 \\ 0 & -\sigma^i \end{pmatrix}, \quad S^{ij} = \frac{i}{4}[\gamma^i, \gamma^j] = \frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}\begin{pmatrix} \sigma^k & 0 \\ 0 & \sigma^k \end{pmatrix} \equiv \frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}\Sigma^k.$$

Решение: Имеем

$$S^{0i} = \frac{i}{4}[\gamma^0, \gamma^i] = \frac{i}{4}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) =$$
$$= \frac{i}{4}\left(\begin{pmatrix} -\sigma^i & 0 \\ 0 & \sigma^i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \sigma^i & 0 \\ 0 & -\sigma^i \end{pmatrix} \right) = -\frac{i}{2} \begin{pmatrix} \sigma^i & 0 \\ 0 & -\sigma^i \end{pmatrix} \tag{0.3}$$

И также находим

$$S^{ij} = \frac{i}{4}[\gamma^i, \gamma^j] = \frac{i}{4}\left(\begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma^j \\ -\sigma^j & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \sigma^j \\ -\sigma^j & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} \right) =$$
$$= \frac{i}{4}\left(\begin{pmatrix} -\sigma^i\sigma^j & 0 \\ 0 & -\sigma^i\sigma^j \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\sigma^j\sigma^i & 0 \\ 0 & -\sigma^j\sigma^i \end{pmatrix} \right) = -\frac{i}{4} \begin{pmatrix} [\sigma^i, \sigma^j] & 0 \\ 0 & [\sigma^i, \sigma^j] \end{pmatrix} =$$
$$= \frac{1}{2}\varepsilon^{ijk} \begin{pmatrix} \sigma^k & 0 \\ 0 & \sigma^k \end{pmatrix} \equiv \frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}\Sigma^k, \tag{0.4}$$

где мы использовали то, что $[\sigma^i, \sigma^j] = 2i\varepsilon^{ijk}\sigma^k$ и $\varepsilon^{123} = 1.$ ○

○ **4.** Покажите, что $[\gamma^\mu, S^{\rho\sigma}] = (\mathcal{J}^{\rho\sigma})^\mu_\nu \gamma^\nu$, где $(\mathcal{J}^{\rho\sigma})_{\alpha\beta} = i(\delta^\rho_\alpha \delta^\sigma_\beta - \delta^\rho_\beta \delta^\sigma_\alpha)$.
Решение: Имеем

$$[\gamma^\mu, S^{\rho\sigma}] = \frac{i}{4}[\gamma^\mu, [\gamma^\rho, \gamma^\sigma]] = \frac{i}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\rho\gamma^\sigma - \gamma^\sigma\gamma^\rho] = \frac{i}{4}([\gamma^\mu, \gamma^\rho\gamma^\sigma] - [\gamma^\mu, \gamma^\sigma\gamma^\rho]) =$$
$$= \frac{i}{4}(\gamma^\mu\gamma^\rho\gamma^\sigma - \gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma^\mu - \gamma^\mu\gamma^\sigma\gamma^\rho + \gamma^\sigma\gamma^\rho\gamma^\mu) =$$
$$= \frac{i}{4}(-\gamma^\rho\gamma^\mu\gamma^\sigma + 2g^{\mu\rho}\gamma^\sigma - \gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma^\mu + \gamma^\sigma\gamma^\mu\gamma^\rho - 2g^{\mu\sigma}\gamma^\rho + \gamma^\sigma\gamma^\rho\gamma^\mu) =$$
$$= \frac{i}{4}(-2g^{\mu\sigma}\gamma^\rho + 2g^{\mu\rho}\gamma^\sigma + 2g^{\mu\rho}\gamma^\sigma - 2g^{\mu\sigma}\gamma^\rho) = i(g^{\mu\rho}\gamma^\sigma - g^{\mu\sigma}\gamma^\rho) =$$
$$= i(g^{\rho\mu}\delta^\sigma_\nu - g^{\sigma\mu}\delta^\rho_\nu)\gamma^\nu = (\mathcal{J}^{\rho\sigma})^\mu_\nu \gamma^\nu. \tag{0.5}$$

○

○ **5.** Покажите, что верно равенство

$$(1 + \frac{i}{2}\omega_{\rho\sigma}S^{\rho\sigma})\gamma^\mu(1 - \frac{i}{2}\omega_{\rho\sigma}S^{\rho\sigma}) = (1 - \frac{i}{2}\omega_{\rho\sigma}\mathcal{J}^{\rho\sigma})^\mu_\nu \gamma^\nu.$$

Решение: Имеем

$$(1 + \frac{i}{2}\omega_{\rho\sigma}S^{\rho\sigma})\gamma^\mu(1 - \frac{i}{2}\omega_{\rho\sigma}S^{\rho\sigma}) = \gamma^\mu + \frac{i}{2}\omega_{\rho\sigma}[S^{\rho\sigma}, \gamma^\mu] + O(\omega^2) = (1 - \frac{i}{2}\omega_{\rho\sigma}\mathcal{J}^{\rho\sigma})^\mu_\nu \gamma^\nu + O(\omega^2), \tag{0.6}$$

где мы использовали результат предыдущего упражнения. ○

○ **6.** Проверьте, что $(S^{ij})^\dagger = S^{ij}$, $(S^{0i})^\dagger = -S^{0i}$, $\quad (S^{ij})^\dagger\gamma^0 = \gamma^0 S^{ij}$, $\quad (S^{0i})^\dagger\gamma^0 = -\gamma^0 S^{0i}$.
Решение: Используя результат упражнения 3, а также $(\sigma^i)^\dagger = \sigma^i$, очевидно, что $(S^{ij})^\dagger = S^{ij}$, $(S^{0i})^\dagger = -S^{0i}$. Далее, используя, что $(\gamma^0)^\dagger = \gamma^0$, можно получить остальные равенства. Также все можно было получить непостредственно из определения $S^{\mu\nu}$ и из того, что $(\gamma^0)^\dagger = \gamma^0$ и $(\gamma^i)^\dagger = -\gamma^i$. ○

○ **7.** Покажите, что $\bar{\psi}\psi$ есть лоренцевский скаляр, а $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ лоренцевский вектор, где $\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger\gamma^0$.

Решение: При преобразовании Лоренца $x^\mu \to \Lambda^\mu_{\ \nu} x^\nu$, спинор преобразуется как

$$\psi(x) \to \Lambda_{\frac{1}{2}} \psi(x), \quad \text{где} \quad \Lambda_{\frac{1}{2}} = \exp(-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu} S^{\mu\nu}), \tag{0.7}$$

тогда имеем для $\bar{\psi}$

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0 \to \psi^\dagger \exp(\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}(S^{\mu\nu})^\dagger)\gamma^0 = \psi^\dagger \gamma^0 \exp(\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu} S^{\mu\nu}) = \bar{\psi}\Lambda^{-1}_{\frac{1}{2}}, \tag{0.8}$$

где мы использовали результаты упражнения 6. Далее имеем

$$\bar{\psi}\psi \to \bar{\psi}\Lambda^{-1}_{\frac{1}{2}}\Lambda_{\frac{1}{2}}\psi = \bar{\psi}\psi \tag{0.9}$$

и также

$$\bar{\psi}\gamma^\mu\psi \to \bar{\psi}\Lambda^{-1}_{\frac{1}{2}}\gamma^\mu\Lambda_{\frac{1}{2}}\psi = \Lambda^\mu_{\ \nu}\,\bar{\psi}\gamma^\nu\psi, \tag{0.10}$$

где мы использовали результат упражнения 5. ◯

◯ **8.** Покажите, что уравнения Эйлера-Лагранжа для $\bar{\psi}$ (или $\psi^\dagger$) для лагранжиана $\mathcal{L}_{\text{Dirac}} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi$ приводят к уравнению Дирака $(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi(x) = 0$.

Решение: Получаем из $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\bar{\psi}} = 0$:

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi(x) = 0. \tag{0.11}$$

◯

3.2 Вейлевские спиноры.

◯ **9.** Проверьте, что для левого ψ_{L} и правого ψ_{R} вейлевских спиноров, при бесконечно мылых вращениях $\boldsymbol{\theta}$ ($\theta_i = \frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}\omega_{jk}$) и бустах $\boldsymbol{\beta}$ ($\beta_i = \omega_{0i}$), преобразования имеют вид

$$\psi_{\text{L}} \to (1 - i\boldsymbol{\theta}\cdot\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} - \boldsymbol{\beta}\cdot\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2})\psi_L,$$

$$\psi_{\text{R}} \to (1 - i\boldsymbol{\theta}\cdot\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} + \boldsymbol{\beta}\cdot\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2})\psi_R.$$

Решение: Имеем

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} &= \psi \to (1 - \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}S^{\mu\nu})\psi = (1 - i\omega_{0i}S^{0i} - \frac{i}{2}\omega_{ij}S^{ij})\begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} = \\
&= (1 - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \omega_{0i}\sigma^i & 0 \\ 0 & -\omega_{0i}\sigma^i \end{pmatrix} - \frac{i}{4}\omega_{ij}\varepsilon^{ijk}\begin{pmatrix} \sigma^k & 0 \\ 0 & \sigma^k \end{pmatrix})\begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} = \\
&= (1 - \begin{pmatrix} \beta_i\frac{\sigma^i}{2} + i\theta_i\frac{\sigma^i}{2} & 0 \\ 0 & -\beta_i\frac{\sigma^i}{2} + i\theta_i\frac{\sigma^i}{2} \end{pmatrix})\begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{0.12}$$

В итоге получим преобразование $\psi_{\text{L}} \to (1 - i\boldsymbol{\theta}\cdot\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} - \boldsymbol{\beta}\cdot\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2})\psi_L$, и $\psi_{\text{R}} \to (1 - i\boldsymbol{\theta}\cdot\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} + \boldsymbol{\beta}\cdot\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2})\psi_R$. ◯

◯ **10.** Докажите тождество $\sigma^2\boldsymbol{\sigma}^* = -\boldsymbol{\sigma}\sigma^2$, и покажите, что величина $\sigma^2\psi^*_{\text{L}}$ преобразуется подобно правому спинору.

Решение: Используя, что $(\sigma^1)^* = \sigma^1, (\sigma^2)^* = -\sigma^2,\ (\sigma^3)^* = \sigma^3$, а также $\{\sigma^i, \sigma^j\} = 2\delta^{ij}$, легко проверить, что $\sigma^2\boldsymbol{\sigma}^* = -\boldsymbol{\sigma}\sigma^2$. Далее получаем

$$\sigma^2\psi_{\mathrm{L}}^* \to \sigma^2(1 + i\boldsymbol{\theta}\cdot\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} - \boldsymbol{\beta}\cdot\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2})\psi_L^* = (1 - i\boldsymbol{\theta}\cdot\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} + \boldsymbol{\beta}\cdot\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2})\sigma^2\psi_L^*. \tag{0.13}$$

В итоге видим, что $\sigma^2\psi_{\mathrm{L}}^* \to (1 - i\boldsymbol{\theta}\cdot\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} + \boldsymbol{\beta}\cdot\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2})\sigma^2\psi_L^*$, как и $\psi_{\mathrm{R}} \to (1 - i\boldsymbol{\theta}\cdot\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} + \boldsymbol{\beta}\cdot\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2})\psi_R$. ◯

3.3 Решения уравнения Дирака для свободных частиц.

◯ **11.** Покажите, что $\exp\left[\begin{pmatrix} 0 & \eta \\ \eta & 0 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}\eta & \mathrm{sh}\eta \\ \mathrm{sh}\eta & \mathrm{ch}\eta \end{pmatrix}$, и

$$\exp\left[\begin{pmatrix} -\eta\sigma^3/2 & 0 \\ 0 & \eta\sigma^3/2 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}(\eta/2) - \sigma^3\mathrm{sh}(\eta/2) & 0 \\ 0 & \mathrm{ch}(\eta/2) + \sigma^3\mathrm{sh}(\eta/2) \end{pmatrix}.$$

Решение: Имеем

$$\begin{pmatrix} 0 & \eta \\ \eta & 0 \end{pmatrix}^{2n} = \begin{pmatrix} \eta^{2n} & 0 \\ 0 & \eta^{2n} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & \eta \\ \eta & 0 \end{pmatrix}^{2n+1} = \begin{pmatrix} 0 & \eta^{2n+1} \\ \eta^{2n+1} & 0 \end{pmatrix}. \tag{0.14}$$

В итоге получим

$$\begin{aligned}\exp\left[\begin{pmatrix} 0 & \eta \\ \eta & 0 \end{pmatrix}\right] &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\begin{pmatrix} 0 & \eta \\ \eta & 0 \end{pmatrix}^k = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n)!}\begin{pmatrix} \eta^{2n} & 0 \\ 0 & \eta^{2n} \end{pmatrix} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!}\begin{pmatrix} 0 & \eta^{2n+1} \\ \eta^{2n+1} & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \mathrm{ch}\eta & \mathrm{sh}\eta \\ \mathrm{sh}\eta & \mathrm{ch}\eta \end{pmatrix}.\end{aligned} \tag{0.15}$$

Также имеем

$$\begin{pmatrix} -\eta\sigma^3/2 & 0 \\ 0 & \eta\sigma^3/2 \end{pmatrix}^{2n} = \begin{pmatrix} (\frac{\eta}{2})^{2n} & 0 \\ 0 & (\frac{\eta}{2})^{2n} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -\eta\sigma^3/2 & 0 \\ 0 & \eta\sigma^3/2 \end{pmatrix}^{2n+1} = \begin{pmatrix} -(\frac{\eta}{2})^{2n+1}\sigma^3 & 0 \\ 0 & (\frac{\eta}{2})^{2n+1}\sigma^3 \end{pmatrix}. \tag{0.16}$$

И аналогично получаем

$$\exp\left[\begin{pmatrix} -\eta\sigma^3/2 & 0 \\ 0 & \eta\sigma^3/2 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}(\eta/2) - \sigma^3\mathrm{sh}(\eta/2) & 0 \\ 0 & \mathrm{ch}(\eta/2) + \sigma^3\mathrm{sh}(\eta/2) \end{pmatrix}, \tag{0.17}$$

что и требовалось показать. ◯

◯ **12.** Докажите, что $(p\cdot\sigma)(p\cdot\bar{\sigma}) = p^2 = m^2$, где $\sigma = (1, \boldsymbol{\sigma})$ и $\bar{\sigma} = (1, -\boldsymbol{\sigma})$.

Решение: Имеем

$$(p\cdot\sigma)(p\cdot\bar{\sigma}) = p_\mu p_\nu \sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu = p_\mu p_\nu\frac{1}{2}(\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu + \sigma^\nu\bar{\sigma}^\mu) = p_\mu p_\nu g^{\mu\nu} = p^2 = m^2, \tag{0.18}$$

где мы использовали, что $\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu + \sigma^\nu\bar{\sigma}^\mu = 2g^{\mu\nu}$, что легко проверить прямым вычислением и учитывая, что $\{\sigma^i, \sigma^j\} = 2\delta^{ij}$.◯

◯ **13*.** Найдите собственные числа и общий вид матрицы $\sqrt{p\cdot\sigma}$.

Решение: Имеем

$$p\cdot\sigma = g_{\mu\nu}p^\mu\sigma^\nu = p^0\sigma^0 - \boldsymbol{p}\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} p^0 - p^3 & -p^1 + ip^2 \\ -p^1 - ip^2 & p^0 + p^3 \end{pmatrix}. \tag{0.19}$$

Находя собственные значения $\lambda_{1,2} = p^0 \pm |\boldsymbol{p}|$, легко переписать данную матрицу в виде

$$p\cdot\sigma = S\Lambda S^{-1} = \begin{pmatrix} -p^3-|\boldsymbol{p}| & -p^3+|\boldsymbol{p}| \\ -p^1-ip^2 & -p^1-ip^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p^0-|\boldsymbol{p}| & 0 \\ 0 & p^0+|\boldsymbol{p}| \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2|\boldsymbol{p}|} & \frac{p^3-|\boldsymbol{p}|}{2|\boldsymbol{p}|(p^1+ip^2)} \\ \frac{1}{2|\boldsymbol{p}|} & -\frac{p^3+|\boldsymbol{p}|}{2|\boldsymbol{p}|(p^1+ip^2)} \end{pmatrix}. \quad (0.20)$$

Тогда для $\sqrt{p\cdot\sigma}$ получим

$$\sqrt{p\cdot\sigma} = S\sqrt{\Lambda}S^{-1} = \begin{pmatrix} -p^3-|\boldsymbol{p}| & -p^3+|\boldsymbol{p}| \\ -p^1-ip^2 & -p^1-ip^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{p^0-|\boldsymbol{p}|} & 0 \\ 0 & \sqrt{p^0+|\boldsymbol{p}|} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2|\boldsymbol{p}|} & \frac{p^3-|\boldsymbol{p}|}{2|\boldsymbol{p}|(p^1+ip^2)} \\ \frac{1}{2|\boldsymbol{p}|} & -\frac{p^3+|\boldsymbol{p}|}{2|\boldsymbol{p}|(p^1+ip^2)} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{|\boldsymbol{p}|\mathfrak{s}-p^3\mathfrak{r}}{2|\boldsymbol{p}|} & -\frac{\mathfrak{r}}{2|\boldsymbol{p}|}(p^1-ip^2) \\ -\frac{\mathfrak{r}}{2|\boldsymbol{p}|}(p^1+ip^2) & \frac{|\boldsymbol{p}|\mathfrak{s}+\mathfrak{r}p^3}{2|\boldsymbol{p}|} \end{pmatrix} = g_{\mu\nu}\tilde{p}^\mu\sigma^\mu = \tilde{p}\cdot\sigma, \quad \tilde{p} = (\frac{\mathfrak{s}}{2}, \frac{\mathfrak{r}}{2}\frac{\boldsymbol{p}}{|\boldsymbol{p}|}), \quad (0.21)$$

где $\mathfrak{s} = \sqrt{p^0+|\boldsymbol{p}|} + \sqrt{p^0-|\boldsymbol{p}|}$, а $\mathfrak{r} = \sqrt{p^0+|\boldsymbol{p}|} - \sqrt{p^0-|\boldsymbol{p}|}$. ○

○ **14.** Проверить, что $\psi(x) = \begin{pmatrix} \sqrt{p\cdot\sigma}\xi \\ \sqrt{p\cdot\bar{\sigma}}\xi \end{pmatrix} e^{-ipx}$ есть решение уравнения Дирака.

Решение: Мы должны проверить, что

$$(\gamma^\mu p_\mu - m)u(p) = (g_{\mu\nu}\gamma^\mu p^\nu - m)u(p) = (\gamma^0 p^0 - \gamma^i p^i - m)u(p) = 0, \quad (0.22)$$

где спинор $u(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{p\cdot\sigma}\xi \\ \sqrt{p\cdot\bar{\sigma}}\xi \end{pmatrix}$, а γ-матрицы взяты в киральном (Вейлевском) представлении: $\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}$. Имеем

$$(\gamma^\mu p_\mu - m)u(p) = \begin{pmatrix} -m & p^0\sigma^0 - p^i\sigma^i \\ p^0\sigma^0 + p^i\sigma^i & -m \end{pmatrix} u(p) = \begin{pmatrix} -m & p\cdot\sigma \\ p\cdot\bar{\sigma} & -m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{p\cdot\sigma}\xi \\ \sqrt{p\cdot\bar{\sigma}}\xi \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} (-m\sqrt{p\cdot\sigma} + p\cdot\sigma\sqrt{p\cdot\bar{\sigma}})\xi \\ (-m\sqrt{p\cdot\bar{\sigma}} + p\cdot\bar{\sigma}\sqrt{p\cdot\sigma})\xi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-m\sqrt{p\cdot\sigma} + \sqrt{p\cdot\sigma}\sqrt{p\cdot\sigma}\sqrt{p\cdot\bar{\sigma}})\xi \\ (-m\sqrt{p\cdot\bar{\sigma}} + \sqrt{p\cdot\bar{\sigma}}\sqrt{p\cdot\bar{\sigma}}\sqrt{p\cdot\sigma})\xi \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} (-m\sqrt{p\cdot\sigma} + \sqrt{p\cdot\sigma}m)\xi \\ (-m\sqrt{p\cdot\bar{\sigma}} + \sqrt{p\cdot\bar{\sigma}}m)\xi \end{pmatrix} = 0, \quad (0.23)$$

что и требовалось показать. ○

○ **15.** Покажите, что $\bar{u}u = 2m\xi^\dagger\xi$, где $u(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{p\cdot\sigma}\xi \\ \sqrt{p\cdot\bar{\sigma}}\xi \end{pmatrix}$, а $\bar{u}(p) = u^\dagger(p)\gamma^0$.

Решение: Имеем

$$\bar{u}(p) = u^\dagger(p)\gamma^0 = \begin{pmatrix} \xi^\dagger\sqrt{p\cdot\sigma} & \xi^\dagger\sqrt{p\cdot\bar{\sigma}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi^\dagger\sqrt{p\cdot\bar{\sigma}} & \xi^\dagger\sqrt{p\cdot\sigma} \end{pmatrix}, \quad (0.24)$$

где мы использовали, что $(\sqrt{p\cdot\sigma})^\dagger = \sqrt{p\cdot\sigma}$ и $(\sqrt{p\cdot\bar{\sigma}})^\dagger = \sqrt{p\cdot\bar{\sigma}}$. Далее получаем

$$\bar{u}(p)u(p) = \begin{pmatrix} \xi^\dagger\sqrt{p\cdot\bar{\sigma}} & \xi^\dagger\sqrt{p\cdot\sigma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{p\cdot\sigma}\xi \\ \sqrt{p\cdot\bar{\sigma}}\xi \end{pmatrix} = 2\xi^\dagger\sqrt{p\cdot\bar{\sigma}}\sqrt{p\cdot\sigma}\xi = 2m\xi^\dagger\xi, \quad (0.25)$$

что и требовалось показать. ○

◯ **16.** Покажите, что $\bar{v}^r(p)v^s(p) = -2m\delta^{rs}$, $\quad v^{r\dagger}(p)v^s(p) = 2E_{\mathbf{p}}\delta^{rs}$, где $v^s(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{p\cdot\sigma}\eta^s \\ -\sqrt{p\cdot\bar{\sigma}}\eta^s \end{pmatrix}$ и $\eta^{r\dagger}\eta^s = \delta^{rs}$, $s, r = 1, 2$.

Решение: Имеем

$$\bar{v}^r(p)v^s(p) = \begin{pmatrix} -\eta^{r\dagger}\sqrt{p\cdot\bar{\sigma}} & \eta^{r\dagger}\sqrt{p\cdot\sigma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{p\cdot\sigma}\eta^s \\ -\sqrt{p\cdot\bar{\sigma}}\eta^s \end{pmatrix} = -2m\eta^{r\dagger}\eta^s = -2m\delta^{rs}. \tag{0.26}$$

Далее

$$v^{r\dagger}(p)v^s(p) = \begin{pmatrix} \eta^{r\dagger}\sqrt{p\cdot\sigma} & -\eta^{r\dagger}\sqrt{p\cdot\bar{\sigma}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{p\cdot\sigma}\eta^s \\ -\sqrt{p\cdot\bar{\sigma}}\eta^s \end{pmatrix} = \eta^{r\dagger}(p\cdot\sigma + p\cdot\bar{\sigma})\eta^s = \eta^{r\dagger}(2p^0\sigma^0)\eta^s =$$
$$= 2p^0\eta^{r\dagger}\eta^s = 2E_{\boldsymbol{p}}\delta^{rs}, \tag{0.27}$$

что и требовалось показать. ◯

◯ **17.** Проверьте, что $\bar{u}^r(p)v^s(p) = \bar{v}^r(p)u^s(p) = 0 \quad$ и $\quad u^{r\dagger}(\mathbf{p})v^s(-\mathbf{p}) = v^{r\dagger}(-\mathbf{p})u^s(\mathbf{p}) = 0$.

Решение: Имеем

$$\bar{u}^r(p)v^s(p) = \begin{pmatrix} \xi^{r\dagger}\sqrt{p\cdot\bar{\sigma}} & \xi^{r\dagger}\sqrt{p\cdot\sigma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{p\cdot\sigma}\eta^s \\ -\sqrt{p\cdot\bar{\sigma}}\eta^s \end{pmatrix} = \xi^{r\dagger}(\sqrt{p\cdot\bar{\sigma}}\sqrt{p\cdot\sigma} - \sqrt{p\cdot\sigma}\sqrt{p\cdot\bar{\sigma}})\eta^s =$$
$$= \xi^{r\dagger}(m - m)\eta^s = 0,$$
$$\bar{v}^r(p)u^s(p) = \begin{pmatrix} -\eta^{r\dagger}\sqrt{p\cdot\bar{\sigma}} & \eta^{r\dagger}\sqrt{p\cdot\sigma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{p\cdot\sigma}\xi^s \\ \sqrt{p\cdot\bar{\sigma}}\xi^s \end{pmatrix} = \eta^{r\dagger}(-\sqrt{p\cdot\bar{\sigma}}\sqrt{p\cdot\sigma} + \sqrt{p\cdot\sigma}\sqrt{p\cdot\bar{\sigma}})\xi^s =$$
$$= \eta^{r\dagger}(-m + m)\xi^s = 0. \tag{0.28}$$

Далее имеем

$$u^{r\dagger}(\mathbf{p})v^s(-\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} \xi^{r\dagger}\sqrt{p\cdot\sigma} & \xi^{r\dagger}\sqrt{p\cdot\bar{\sigma}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{p\cdot\bar{\sigma}}\eta^s \\ -\sqrt{p\cdot\sigma}\eta^s \end{pmatrix} = 0, \tag{0.29}$$

для $v^{r\dagger}(-\mathbf{p})u^s(\mathbf{p}) = 0$ проверяется аналогично. ◯

◯ **18.** Докажите формулу $\sum\limits_{s=1,2} \xi^s\xi^{s\dagger} = \mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, где $\xi^{r\dagger}\xi^s = \delta^{rs}$ и покажите, что $\sum\limits_s u^s(p)\bar{u}^s(p) = \gamma\cdot p + m$, а $\sum\limits_s v^s(p)\bar{v}^s(p) = \gamma\cdot p - m$

Решение: Так как ξ^s, $s = 1, 2$ образуют ортонормированный базис: $\xi^{r\dagger}\xi^s = \delta^{rs}$, то взяв произвольный вектор $\boldsymbol{e} = e_1\xi^1 + e_2\xi^2$, имеем

$$(\sum_{s=1,2}\xi^s\xi^{s\dagger})\boldsymbol{e} = e_1\sum_{s=1,2}\xi^s\xi^{s\dagger}\xi^1 + e_2\sum_{s=1,2}\xi^s\xi^{s\dagger}\xi^2 = e_1\sum_{s=1,2}\xi^s\delta^{s1} + e_2\sum_{s=1,2}\xi^s\delta^{s2} = e_1\xi^1 + e_2\xi^2 = \boldsymbol{e}, \tag{0.30}$$

откуда следует, что $\sum\limits_{s=1,2}\xi^s\xi^{s\dagger} = \mathbf{1}$. Далее получаем

$$\sum_s u^s(p)\bar{u}^s(p) = \sum_s \begin{pmatrix} \sqrt{p\cdot\sigma}\xi^s \\ \sqrt{p\cdot\bar{\sigma}}\xi^s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^{s\dagger}\sqrt{p\cdot\bar{\sigma}} & \xi^{s\dagger}\sqrt{p\cdot\sigma} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m & p\cdot\sigma \\ p\cdot\bar{\sigma} & m \end{pmatrix} = \gamma\cdot p + m,$$
$$\sum_s v^s(p)\bar{v}^s(p) = \sum_s \begin{pmatrix} \sqrt{p\cdot\sigma}\eta^s \\ -\sqrt{p\cdot\bar{\sigma}}\eta^s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\eta^{s\dagger}\sqrt{p\cdot\bar{\sigma}} & \eta^{s\dagger}\sqrt{p\cdot\sigma} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -m & p\cdot\sigma \\ p\cdot\bar{\sigma} & -m \end{pmatrix} = \gamma\cdot p - m, \tag{0.31}$$

что и требовалось показать. ◯

3.4 Матрицы Дирака и билинейные формы Дирака.

◯ **19.** Проверьте, что $\gamma^5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = -\frac{i}{4!}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho\gamma_\sigma$, и $\varepsilon^{0123} = -\varepsilon_{0123} = 1$.

Решение: Так как $\gamma_\mu\gamma_\nu = 2g_{\mu\nu} - \gamma_\nu\gamma_\nu$, и $g_{\mu\nu}$ симметричный тензор, и при свертке с $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ он равен нулю, то при свертке с $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ можно считать, что $\gamma_\mu\gamma_\nu \sim -\gamma_\nu\gamma_\mu$. Тогда $\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho\gamma_\sigma \sim \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$. Таким образом получаем

$$-\frac{i}{4!}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho\gamma_\sigma = -\frac{i}{4!}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3, \tag{0.32}$$

где мы воспользовались тем, что $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = -4!$. ◯

◯ **20.** Проверьте, что $\gamma^{\mu\nu\rho} = i\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\gamma_\sigma\gamma^5$, где $\gamma^{\mu\nu\rho} = \gamma^{[\mu}\gamma^\nu\gamma^{\rho]} = \frac{1}{3!}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho - \gamma^\nu\gamma^\mu\gamma^\rho - \gamma^\mu\gamma^\rho\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\mu + \gamma^\rho\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\rho\gamma^\nu\gamma^\mu)$.

Решение: Очевидно, что если два каких-либо индекса совпадают, то $\gamma^{\mu\nu\rho} = 0$. Рассмотрим случай, когда все индексы μ, ν, ρ разные. Тогда гамма-матрицы антикоммутируют между собой, откуда $\gamma^{\mu\nu\rho} = \gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho$. Далее пусть σ есть индекс, который не равен индексам μ, ν, ρ (например $\mu = 2$, $\nu = 3$, $\rho = 0$, тогда $\sigma = 1$), тогда мы можем записать, используя, что $\gamma_\sigma\gamma^\sigma = 1$ (здесь нет суммирования по индексу σ)

$$\gamma^{\mu\nu\rho} = \gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma_\sigma\gamma^\sigma = -\gamma_\sigma\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma = i\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\gamma_\sigma(i\gamma^0\gamma^1\gamma^3\gamma^4) = i\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\gamma_\sigma\gamma^5, \tag{0.33}$$

где мы использовали, что $\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma = \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\gamma^0\gamma^1\gamma^3\gamma^4$, так как все индексы разные. ◯

◯ **21.** Проверьте, что $(\gamma^5)^\dagger = \gamma^5, \quad (\gamma^5)^2 = 1, \quad \{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0$.

Решение: Используя, что $(\gamma^0)^\dagger = \gamma^0$, а $(\gamma^i)^\dagger = -\gamma^i,\ i = 1, 2, 3$, имеем:

$$(\gamma^5)^\dagger = (i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3)^\dagger = -i(\gamma^3)^\dagger(\gamma^2)^\dagger(\gamma^1)^\dagger(\gamma^0)^\dagger = i\gamma^3\gamma^2\gamma^1\gamma^0 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \gamma^5. \tag{0.34}$$

Также

$$(\gamma^5)^2 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = -\gamma^2\gamma^3\gamma^2\gamma^3 = -\gamma^3\gamma^3 = 1. \tag{0.35}$$

И в итоге

$$\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^\mu + i\gamma^\mu\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = -i\gamma^\mu\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 + i\gamma^\mu\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = 0, \tag{0.36}$$

так как при переносе γ^μ через произведение $\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$, она антикоммутирует с тремя гамма-матрицами и коммутирует с собой, откуда и появляется знак минус. ◯

◯ **22.** Покажите, что $\partial_\mu j^\mu = 0,\ \partial_\mu j^{\mu 5} = 2im\bar{\psi}\gamma^5\psi$, где $j^\mu(x) = \bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x), \quad j^{\mu 5}(x) = \bar{\psi}(x)\gamma^\mu\gamma^5\psi(x)$, учитывая уравнения движения.

Решение: Уравнения движения есть

$$\begin{aligned} &(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi = 0, \\ &(i(\partial_\mu\bar{\psi})\gamma^\mu + m\bar{\psi}) = 0, \end{aligned} \tag{0.37}$$

далее получаем

$$\partial_\mu j^\mu = \partial_\mu(\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)) = (\partial_\mu\bar{\psi}(x))\gamma^\mu\psi(x) + \bar{\psi}(x)\gamma^\mu\partial_\mu\psi(x) = im\bar{\psi}(x)\psi(x) - m\bar{\psi}(x)\psi(x) = 0, \tag{0.38}$$

аналогично имеем

$$\partial_\mu j^{\mu 5} = \partial_\mu(\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi) = (\partial_\mu\bar{\psi})\gamma^\mu\gamma^5\psi + \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\partial_\mu\psi = im\bar{\psi}\gamma^5\psi + im\bar{\psi}\gamma^5\psi = 2im\bar{\psi}\gamma^5\psi, \tag{0.39}$$

что и требовалось показать. ◯

◯ **23.** Покажите, что $j^\mu(x)$ и $j^{\mu 5}(x)$ являются нетеровскими токами, соответствующими преобразованиям $\psi(x) \to e^{i\alpha}\psi(x)$ и $\psi(x) \to e^{i\alpha\gamma^5}\psi(x)$.

Решение: Имеем $\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi$ и $\psi \to (1 + i\alpha)\psi$, откуда $\delta\psi = i\psi$, и получим

$$j^\mu = -\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)}\delta\psi = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi, \tag{0.40}$$

далее $\psi \to (1 + i\alpha\gamma^5)\psi$, откуда $\delta\psi = i\gamma^5\psi$ и получим

$$j^{\mu 5} = -\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)}\delta\psi = \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi, \tag{0.41}$$

что и требовалось показать. ◯

◯ **24.** Используя тождество Фирца $(\sigma^\mu)_{\alpha\beta}(\sigma_\mu)_{\gamma\delta} = 2\varepsilon_{\alpha\gamma}\varepsilon_{\beta\delta}$, покажите, что

$$(\bar{u}_{1R}\sigma^\mu u_{2R})(\bar{u}_{3R}\sigma_\mu u_{4R}) = -(\bar{u}_{1R}\sigma^\mu u_{4R})(\bar{u}_{3R}\sigma_\mu u_{2R}).$$

$$(\bar{u}_{1L}\bar{\sigma}^\mu\sigma^\nu\bar{\sigma}^\lambda u_{2L})(\bar{u}_{3L}\bar{\sigma}_\mu\sigma_\nu\bar{\sigma}_\lambda u_{4L}) = 16(\bar{u}_{1L}\bar{\sigma}^\mu u_{2L})(\bar{u}_{3L}\bar{\sigma}_\mu u_{4L}).$$

Решение: Используем, что $(\sigma^\mu)_{\alpha\beta}(\sigma_\mu)_{\gamma\delta} = 2\varepsilon_{\alpha\gamma}\varepsilon_{\beta\delta} = -2\varepsilon_{\alpha\gamma}\varepsilon_{\delta\beta} = -(\sigma^\mu)_{\alpha\delta}(\sigma_\mu)_{\gamma\beta}$, откуда

$$\begin{aligned}(\bar{u}_{1R}\sigma^\mu u_{2R})(\bar{u}_{3R}\sigma_\mu u_{4R}) &= \bar{u}_{1R\alpha}u_{2R\beta}\bar{u}_{3R\gamma}u_{4R\delta}(\sigma^\mu)_{\alpha\beta}(\sigma_\mu)_{\gamma\delta} = -\bar{u}_{1R\alpha}u_{2R\beta}\bar{u}_{3R\gamma}u_{4R\delta}(\sigma^\mu)_{\alpha\delta}(\sigma_\mu)_{\gamma\beta} = \\ &= -(\bar{u}_{1R}\sigma^\mu u_{4R})(\bar{u}_{3R}\sigma_\mu u_{2R}).\end{aligned} \tag{0.42}$$

Далее имеем

$$(\bar{u}_{1L}\bar{\sigma}^\mu\sigma^\nu\bar{\sigma}^\lambda u_{2L})(\bar{u}_{3L}\bar{\sigma}_\mu\sigma_\nu\bar{\sigma}_\lambda u_{4L}) = 2\epsilon_{\alpha\gamma}\bar{u}_{1L\alpha}\bar{u}_{3L\gamma}\epsilon_{\beta\delta}(\sigma^\nu\bar{\sigma}^\lambda u_{2L})_\beta(\sigma_\nu\bar{\sigma}_\lambda u_{4L})_\delta. \tag{0.43}$$

Теперь рассмотрим отдельно

$$\begin{aligned}\epsilon_{\beta\delta}(\sigma^\nu\bar{\sigma}^\lambda u_{2L})_\beta(\sigma_\nu\bar{\sigma}_\lambda u_{4L})_\delta &= \epsilon_{\beta\delta}(\sigma^\nu)_{\beta\rho}(\bar{\sigma}^\lambda)_{\rho\sigma}u_{2L\sigma}(\sigma_\nu\bar{\sigma}_\lambda u_{4L})_\delta = -\epsilon_{\delta\beta}(\sigma^\nu)_{\beta\rho}(\bar{\sigma}^\lambda)_{\rho\sigma}u_{2L\sigma}(\sigma_\nu\bar{\sigma}_\lambda u_{4L})_\delta = \\ &= -(\bar{\sigma}^\nu)_{\beta\delta}\epsilon_{\beta\rho}(\bar{\sigma}^\lambda)_{\rho\sigma}u_{2L\sigma}(\sigma_\nu\bar{\sigma}_\lambda u_{4L})_\delta = -(\bar{\sigma}^\nu)_{\beta\delta}(\sigma^\lambda)_{\rho\beta}\epsilon_{\rho\sigma}u_{2L\sigma}(\sigma_\nu\bar{\sigma}_\lambda u_{4L})_\delta = \\ &= -\epsilon_{\rho\sigma}u_{2L\sigma}(\sigma^\lambda)_{\rho\beta}(\bar{\sigma}^\nu)_{\beta\delta}(\sigma_\nu\bar{\sigma}_\lambda u_{4L})_\delta = \epsilon_{\sigma\rho}u_{2L\sigma}(\sigma^\lambda\bar{\sigma}^\nu\sigma_\nu\bar{\sigma}_\lambda u_{4L})_\rho = \\ &= (4)^2\epsilon_{\sigma\rho}u_{2L\sigma}u_{4L\rho},\end{aligned} \tag{0.44}$$

где мы использовали, что $\epsilon_{\alpha\beta}(\sigma^\mu)_{\beta\gamma} = (\bar{\sigma}^\mu)_{\beta\alpha}\epsilon_{\beta\gamma}$ и $\sigma^\mu\bar{\sigma}_\mu = \bar{\sigma}^\mu\sigma_\mu = 4$. Теперь получаем

$$\begin{aligned}(\bar{u}_{1L}\bar{\sigma}^\mu\sigma^\nu\bar{\sigma}^\lambda u_{2L})(\bar{u}_{3L}\bar{\sigma}_\mu\sigma_\nu\bar{\sigma}_\lambda u_{4L}) &= 2\epsilon_{\alpha\gamma}\bar{u}_{1L\alpha}\bar{u}_{3L\gamma}\epsilon_{\beta\delta}(\sigma^\nu\bar{\sigma}^\lambda u_{2L})_\beta(\sigma_\nu\bar{\sigma}_\lambda u_{4L})_\delta = \\ &= 2\cdot(4)^2\epsilon_{\alpha\gamma}\bar{u}_{1L\alpha}\bar{u}_{3L\gamma}\epsilon_{\sigma\rho}u_{2L\sigma}u_{4L\rho} = \\ &= 16\bar{u}_{1L\alpha}\bar{u}_{3L\gamma}u_{2L\sigma}u_{4L\rho}(\bar{\sigma}^\mu)_{\alpha\sigma}(\bar{\sigma}_\mu)_{\gamma\rho} = \\ &= 16(\bar{u}_{1L}\bar{\sigma}^\mu u_{2L})(\bar{u}_{3L}\bar{\sigma}_\mu u_{4L}),\end{aligned} \tag{0.45}$$

что и требовалось показать. ◯

3.5 Квантование Дираковского поля.

○ **25.** Покажите, что плотность Дираковского гамильтониана дается выражением $\mathcal{H} = \bar{\psi}(-i\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\nabla} + m)\psi$.

Решение: Для канонического момента p имеем

$$p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial_0 \psi} = \bar{\psi} i\gamma^0 = i\psi^\dagger \gamma^0 \gamma^0 = i\psi^\dagger. \tag{0.46}$$

Далее для Гамильтоновой плотности получаем

$$\mathcal{H} = p\partial_0\psi - \mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma^0\partial_0\psi - \bar{\psi}(i\gamma^0\partial_0 + i\gamma^i\partial_i - m)\psi = \bar{\psi}(-i\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\nabla} + m)\psi, \tag{0.47}$$

что и требовалось показать. ○

○ **26.** Покажите, что для данного "неправильного"дираковского поля

$$\psi(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_\mathbf{p}}} e^{i\mathbf{px}} \sum_{s=1,2} \left(a^s_\mathbf{p} u^s(\mathbf{p}) + b^s_{-\mathbf{p}} v^s(-\mathbf{p})\right)$$

выполняются соотношения $[\psi(\mathbf{x}), \psi^\dagger(\mathbf{y})] = \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \times \mathbf{1}_{4\times4}$. Используйте коммутационные соотношения $[a^r_{\boldsymbol{p}}, a^{s\dagger}_{\boldsymbol{q}}] = [b^r_{\boldsymbol{p}}, b^{s\dagger}_{\boldsymbol{q}}] = (2\pi)^3\delta^{(3)}(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{q})\delta^{rs}$.

Решение: Имеем

$$\begin{aligned}
[\psi(\mathbf{x}), \psi^\dagger(\mathbf{y})] &= \int \frac{d^3p d^3q}{(2\pi)^6} \frac{1}{\sqrt{2E_{\boldsymbol{p}} 2E_{\boldsymbol{q}}}} e^{i(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x} - \boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{y})} \times \sum_{r,s} \left([a^r_{\boldsymbol{p}}, a^{s\dagger}_{\boldsymbol{q}}] u^r(\boldsymbol{p})\bar{u}^s(\boldsymbol{q}) + [b^r_{-\boldsymbol{p}}, b^{s\dagger}_{-\boldsymbol{q}}] v^r(-\boldsymbol{p})\bar{v}^s(-\boldsymbol{q})\right)\gamma^0 = \\
&= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\boldsymbol{p}}} e^{i\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})} \left[(\gamma^0 E_{\boldsymbol{p}} - \boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{p} + m) + (\gamma^0 E_{\boldsymbol{p}} + \boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{p} - m)\right]\gamma^0 = \\
&= \delta^{(3)}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) \times \mathbf{1}_{4\times4},
\end{aligned} \tag{0.48}$$

что и требовалось показать. ○

○ **27.** Покажите, что для волновой функции из пункта 26, гамильтониан дается выражением

$$H = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sum_s \left(E_\mathbf{p} a^{s\dagger}_\mathbf{p} a^s_\mathbf{p} - E_\mathbf{p} b^{s\dagger}_\mathbf{p} b^s_\mathbf{p}\right).$$

Решение: Имеем

$$H = \int d^3x \bar{\psi}(-i\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\nabla} + m)\psi, \tag{0.49}$$

где

$$\begin{aligned}
\psi(\mathbf{x}) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_\mathbf{p}}} e^{i\mathbf{px}} \sum_{s=1,2} \left(a^s_\mathbf{p} u^s(\mathbf{p}) + b^s_{-\mathbf{p}} v^s(-\mathbf{p})\right), \\
\bar{\psi}(\boldsymbol{y}) = \psi^\dagger(\mathbf{y})\gamma^0 &= \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_\mathbf{q}}} e^{-i\mathbf{qy}} \sum_{r=1,2} \left(a^{r\dagger}_\mathbf{q} \bar{u}^r(\mathbf{q}) + b^{r\dagger}_{-\mathbf{q}} \bar{v}^r(-\mathbf{q})\right).
\end{aligned} \tag{0.50}$$

Далее получаем

$$H = \int d^3x \bar{\psi}(-i\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\nabla} + m)\psi =$$
$$= \int \frac{d^3p d^3q}{(2\pi)^6} \frac{1}{\sqrt{2E_{\boldsymbol{p}} 2E_{\boldsymbol{q}}}} (2\pi)^3 \delta(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}) \sum_{r,s=1}^{2} \left(a^{r\dagger}_{\mathbf{q}} \bar{u}^r(\mathbf{q}) + b^{r\dagger}_{-\mathbf{q}} \bar{v}^r(-\mathbf{q})\right) (\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{p} + m) \left(a^s_{\mathbf{p}} u^s(\mathbf{p}) + b^s_{-\mathbf{p}} v^s(-\mathbf{p})\right) =$$
$$= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\boldsymbol{p}}} \sum_{r,s=1}^{2} \left(a^{r\dagger}_{\mathbf{p}} \bar{u}^r(\mathbf{p}) + b^{r\dagger}_{-\mathbf{p}} \bar{v}^r(-\mathbf{p})\right) (\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{p} + m) \left(a^s_{\mathbf{p}} u^s(\mathbf{p}) + b^s_{-\mathbf{p}} v^s(-\mathbf{p})\right), \tag{0.51}$$

далее используем из уравнений движения, что $(\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{p}+m)u^s(\boldsymbol{p}) = \gamma^0 E_{\boldsymbol{p}} u^s(\boldsymbol{p})$ и $(\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{p}+m)v^s(-\boldsymbol{p}) = -\gamma^0 E_{\boldsymbol{p}} v^s(-\boldsymbol{p})$ получим

$$H = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2} \sum_{r,s=1}^{2} \left(a^{r\dagger}_{\mathbf{p}} u^{r\dagger}(\mathbf{p}) + b^{r\dagger}_{-\mathbf{p}} v^{r\dagger}(-\mathbf{p})\right) \left(a^s_{\mathbf{p}} u^s(\mathbf{p}) - b^s_{-\mathbf{p}} v^s(-\mathbf{p})\right), \tag{0.52}$$

теперь используем, что $u^{r\dagger}(\mathbf{p})v^s(-\mathbf{p}) = v^{r\dagger}(-\mathbf{p})u^s(\mathbf{p}) = 0$ и получим

$$H = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2} \sum_{r,s=1}^{2} \left(a^{r\dagger}_{\mathbf{p}} a^s_{\mathbf{p}} u^{r\dagger}(\mathbf{p}) u^s(\mathbf{p}) - b^{r\dagger}_{-\mathbf{p}} b^s_{-\mathbf{p}} v^{r\dagger}(-\mathbf{p}) v^s(-\mathbf{p})\right), \tag{0.53}$$

далее используя, что $u^{r\dagger}(\boldsymbol{p})u^s(\boldsymbol{p}) = v^{r\dagger}(\boldsymbol{p})v^s(\boldsymbol{p}) = 2E_{\boldsymbol{p}}\delta^{rs}$, в итоге находим

$$H = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sum_s \left(E_{\mathbf{p}} a^{s\dagger}_{\mathbf{p}} a^s_{\mathbf{p}} - E_{\mathbf{p}} b^{s\dagger}_{\mathbf{p}} b^s_{\mathbf{p}}\right), \tag{0.54}$$

что и требовалось показать. ◯

◯ **28.** Покажите, что $[\psi_a(x), \bar{\psi}_b(y)] = (i\partial\!\!\!/_x + m)_{ab}[\phi(x), \phi(y)]$, где $\phi(x), \phi(y)$ — поля Клейна-Гордона, а ψ_a и $\bar{\psi}_b$ поля из пункта 26 в Гейзенберговском представлении.

Решение: Имеем

$$\psi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\boldsymbol{p}}}} \sum_{s=1,2} \left(a^s_{\boldsymbol{p}} u^s(p) e^{-ip\cdot x} + b^s_{\boldsymbol{p}} v^s(p) e^{ip\cdot x}\right),$$
$$\bar{\psi}(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\boldsymbol{p}}}} \sum_{s=1,2} \left(a^{s\dagger}_{\boldsymbol{p}} \bar{u}^s(p) e^{ip\cdot x} + b^{s\dagger}_{\boldsymbol{p}} \bar{v}^s(p) e^{-ip\cdot x}\right), \tag{0.55}$$

тогда получим

$$[\psi_a(x), \bar{\psi}_b(y)] = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\boldsymbol{p}}} \sum_{s=1,2} \left(u^s_a(p)\bar{u}^s_b(p) e^{-ip\cdot(x-y)} + v^s_a(p)\bar{v}^s_b(p) e^{ip\cdot(x-y)}\right) =$$
$$= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\boldsymbol{p}}} \left((p\!\!\!/ + m)_{ab} e^{-ip\cdot(x-y)} + (p\!\!\!/ - m)_{ab} e^{ip\cdot(x-y)}\right) =$$
$$= (i\partial\!\!\!/_x + m)_{ab} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\boldsymbol{p}}} (e^{-ip\cdot(x-y)} - e^{ip\cdot(x-y)}) =$$
$$= (i\partial\!\!\!/_x + m)_{ab} [\phi(x), \phi(y)], \tag{0.56}$$

что и требовалось показать. ◯

◯ **29.** Покажите, что для "правильно"квантованного Дираковского поля

$$\psi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\sum_s \left(a^s_{\mathbf{p}} u^s(p) e^{-ip\cdot x} + b^{s\dagger}_{\mathbf{p}} v^s(p) e^{ip\cdot x}\right);$$

$$\bar\psi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\sum_s \left(b^s_{\mathbf{p}} \bar v^s(p) e^{-ip\cdot x} + a^{s\dagger}_{\mathbf{p}} \bar u^s(p) e^{ip\cdot x}\right),$$

гамильтониан дается выражением

$$H = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\sum_s \left(E_{\mathbf{p}} a^{s\dagger}_{\mathbf{p}} a^s_{\mathbf{p}} + E_{\mathbf{p}} b^{s\dagger}_{\mathbf{p}} b^s_{\mathbf{p}}\right),$$

где операторы антикоммутируют как $\{a^r_{\boldsymbol{p}}, a^{s\dagger}_{\boldsymbol{q}}\} = \{b^r_{\boldsymbol{p}}, b^{s\dagger}_{\boldsymbol{q}}\} = (2\pi)^3\delta^{(3)}(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q})\delta^{rs}$.

Решение: Имеем

$$H = \int d^3x \bar\psi(-i\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\nabla} + m)\psi, \tag{0.57}$$

далее получаем

$$\begin{aligned} H &= \int d^3x \bar\psi(-i\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\nabla} + m)\psi = \\ &= \int \frac{d^3p d^3q}{(2\pi)^6}\frac{1}{\sqrt{2E_{\boldsymbol{p}}2E_{\boldsymbol{q}}}}(2\pi)^3\delta(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q})\sum_{r,s=1}^{2}\left(a^{r\dagger}_{\mathbf{q}}\bar u^r(\mathbf{q}) + b^r_{-\mathbf{q}}\bar v^r(-\mathbf{q})\right)(\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{p}+m)\Big(a^s_{\mathbf{p}} u^s(\mathbf{p}) + b^{s\dagger}_{-\mathbf{p}} v^s(-\mathbf{p})\Big) = \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\boldsymbol{p}}}\sum_{r,s=1}^{2}\left(a^{r\dagger}_{\mathbf{p}}\bar u^r(\mathbf{p}) + b^r_{-\mathbf{p}}\bar v^r(-\mathbf{p})\right)(\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{p}+m)\Big(a^s_{\mathbf{p}} u^s(\mathbf{p}) + b^{s\dagger}_{-\mathbf{p}} v^s(-\mathbf{p})\Big), \end{aligned} \tag{0.58}$$

далее используем из уравнений движения, что $(\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{p}+m)u^s(\boldsymbol{p}) = \gamma^0 E_{\boldsymbol{p}} u^s(\boldsymbol{p})$ и $(\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{p}+m)v^s(-\boldsymbol{p}) = -\gamma^0 E_{\boldsymbol{p}} v^s(-\boldsymbol{p})$ получим

$$H = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2}\sum_{r,s=1}^{2}\left(a^{r\dagger}_{\mathbf{p}} u^{r\dagger}(\mathbf{p}) + b^r_{-\mathbf{p}} v^{r\dagger}(-\mathbf{p})\right)\Big(a^s_{\mathbf{p}} u^s(\mathbf{p}) - b^{s\dagger}_{-\mathbf{p}} v^s(-\mathbf{p})\Big), \tag{0.59}$$

теперь используем, что $u^{r\dagger}(\mathbf{p})v^s(-\mathbf{p}) = v^{r\dagger}(-\mathbf{p})u^s(\mathbf{p}) = 0$ и получим

$$H = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2}\sum_{r,s=1}^{2}\Big(a^{r\dagger}_{\mathbf{p}} a^s_{\mathbf{p}} u^{r\dagger}(\mathbf{p})u^s(\mathbf{p}) - b^r_{-\mathbf{p}} b^{s\dagger}_{-\mathbf{p}} v^{r\dagger}(-\mathbf{p})v^s(-\mathbf{p})\Big), \tag{0.60}$$

далее используя, что $u^{r\dagger}(\boldsymbol{p})u^s(\boldsymbol{p}) = v^{r\dagger}(\boldsymbol{p})v^s(\boldsymbol{p}) = 2E_{\boldsymbol{p}}\delta^{rs}$, в итоге находим

$$H = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\sum_s\left(E_{\mathbf{p}} a^{s\dagger}_{\mathbf{p}} a^s_{\mathbf{p}} - E_{\mathbf{p}} b^s_{\mathbf{p}} b^{s\dagger}_{\mathbf{p}}\right) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\sum_s\left(E_{\mathbf{p}} a^{s\dagger}_{\mathbf{p}} a^s_{\mathbf{p}} + E_{\mathbf{p}} b^{s\dagger}_{\mathbf{p}} b^s_{\mathbf{p}}\right) + (\text{бесконечная константа}), \tag{0.61}$$

что и требовалось показать. ◯

◯ **30.** Покажите, что унитарный оператор $U(\Lambda)$, преобразует $a^s_{\mathbf{p}}$ по правилу $U(\Lambda)a^s_p U^{-1}(\Lambda) = \sqrt{\frac{E_{\Lambda p}}{E_p}} a^s_{\Lambda p}$.

Решение: Имеем для одночастичного состояния $|\boldsymbol{p}, s\rangle = \sqrt{2E_{\boldsymbol{p}}} a^{s\dagger}_{\boldsymbol{p}}|0\rangle$:

$$U(\Lambda)|\boldsymbol{p}, s\rangle = |\Lambda\boldsymbol{p}, s\rangle = \sqrt{2E_{\Lambda\boldsymbol{p}}} a^{s\dagger}_{\Lambda\boldsymbol{p}}|0\rangle, \tag{0.62}$$

откуда получаем

$$U(\Lambda)|\boldsymbol{p}, s\rangle = \sqrt{2E_{\boldsymbol{p}}} U(\Lambda)a^{s\dagger}_{\boldsymbol{p}}|0\rangle = \sqrt{2E_{\boldsymbol{p}}} U(\Lambda)a^{s\dagger}_{\boldsymbol{p}} U^{-1}(\Lambda)U(\Lambda)|0\rangle = \sqrt{2E_{\Lambda\boldsymbol{p}}} a^{s\dagger}_{\Lambda\boldsymbol{p}}|0\rangle, \tag{0.63}$$

учитывая, что $U(\Lambda)|0\rangle = |0\rangle$, получаем, что

$$\sqrt{2E_{\boldsymbol{p}}} U(\Lambda)a^{s\dagger}_{\boldsymbol{p}} U^{-1}(\Lambda) = \sqrt{2E_{\Lambda\boldsymbol{p}}} a^{s\dagger}_{\Lambda\boldsymbol{p}}, \tag{0.64}$$

откуда находим $U(\Lambda)a^{s\dagger}_{\boldsymbol{p}} U^{-1}(\Lambda) = \sqrt{\frac{E_{\Lambda\boldsymbol{p}}}{E_{\boldsymbol{p}}}} a^{s\dagger}_{\Lambda\boldsymbol{p}}$. ◯

◯ **31.** Рассматривая маленький поворот вокруг оси z, покажите, что $\Lambda_{\frac{1}{2}} \approx 1 - \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}S^{\mu\nu} = 1 - \frac{i}{2}\theta\Sigma^3$.

Решение: При повороте вокруг оси z, $\omega_{12} = -\omega_{21} = \theta$, остальные компоненты $\omega_{\mu\nu}$ равны нулю. Также $S^{ij} = \frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}\Sigma^k$, следовательно

$$\Lambda_{\frac{1}{2}} \approx 1 - \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}S^{\mu\nu} = 1 - \frac{i}{2}(\omega_{12}S^{12} + \omega_{21}S^{21}) = 1 - \frac{i}{2}(\theta\frac{1}{2}\Sigma^3 - \theta(-\frac{1}{2}\Sigma^3)) = 1 - \frac{i}{2}\theta\Sigma^3, \tag{0.65}$$

что и требовалось показать. ◯

◯ **32*.** Оператор углового момента для поля Дирака равен $\boldsymbol{J} = \int d^3x\psi^\dagger(-i\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{\nabla} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\Sigma})\psi$. Упростите отдельно выражение для спиновой i компоненты $J^i_{\text{spin}} = \int d^3x\psi^\dagger(\frac{1}{2}\Sigma^i)\psi$ оператора углового момента и затем для орбитальной $J^i_{\text{orbit}} = \int d^3x\psi^\dagger(-i(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{\nabla})^i)\psi$. Покажите, что оператор $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{J}_{\text{orbit}} + \boldsymbol{J}_{\text{spin}}$ уничтожает вакуум, то есть $\boldsymbol{J}|0\rangle = 0$. Покажите, что $\boldsymbol{J}a^{s\dagger}_0|0\rangle = \sum_r \left(\xi^{r\dagger}\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}\xi^s\right) a^{r\dagger}_0|0\rangle$.

Решение: Используем, что

$$\psi(\boldsymbol{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{e^{i\boldsymbol{p}\boldsymbol{x}}}{\sqrt{2E_{\boldsymbol{p}}}}\sum_{s=1,2}\left(a^s_{\boldsymbol{p}}u^s(\boldsymbol{p}) + b^{s\dagger}_{-\boldsymbol{p}}v^s(-\boldsymbol{p})\right),$$
$$\psi^\dagger(\boldsymbol{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{e^{-i\boldsymbol{p}\boldsymbol{x}}}{\sqrt{2E_{\boldsymbol{p}}}}\sum_{s=1,2}\left(a^{s\dagger}_{\boldsymbol{p}}u^{s\dagger}(\boldsymbol{p}) + b^s_{-\boldsymbol{p}}v^{s\dagger}(-\boldsymbol{p})\right), \tag{0.66}$$

а также, что $u^s(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{p\cdot\sigma}\xi^s \\ \sqrt{p\cdot\bar\sigma}\xi^s \end{pmatrix}$ и $v^s(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{p\cdot\sigma}\eta^s \\ -\sqrt{p\cdot\bar\sigma}\eta^s \end{pmatrix}$, и $u^{r\dagger}(\boldsymbol{p})v^s(-\boldsymbol{p}) = v^{r\dagger}(-\boldsymbol{p})u^s(\boldsymbol{p}) = 0$, и $\sqrt{p\cdot\sigma}\sqrt{p\cdot\bar\sigma} = m$, и $\sqrt{p\cdot\sigma} = \begin{pmatrix} \frac{|\boldsymbol{p}|\mathfrak{s} - p^3\mathfrak{r}}{2|\boldsymbol{p}|} & -\frac{\mathfrak{r}}{2|\boldsymbol{p}|}(p^1 - ip^2) \\ -\frac{\mathfrak{r}}{2|\boldsymbol{p}|}(p^1 + ip^2) & \frac{|\boldsymbol{p}|\mathfrak{s} + \mathfrak{r}p^3}{2|\boldsymbol{p}|} \end{pmatrix} = g_{\mu\nu}\tilde p^\mu\sigma^\mu = \tilde p\cdot\sigma, \quad \tilde p = (\frac{\mathfrak{s}}{2}, \frac{\mathfrak{r}}{2}\frac{\boldsymbol{p}}{|\boldsymbol{p}|})$, где $\mathfrak{s} = \sqrt{p^0 + |\boldsymbol{p}|} + \sqrt{p^0 - |\boldsymbol{p}|}$, а $\mathfrak{r} = \sqrt{p^0 + |\boldsymbol{p}|} - \sqrt{p^0 - |\boldsymbol{p}|}$ (отметим, что $\mathfrak{s}, \mathfrak{r}$ скаляры, а не векторы!).

Спиновая часть: Для спиновой части имеем

$$J^i_{\text{spin}} = \int d^3x\frac{d^3pd^3q}{(2\pi)^6}\frac{e^{-ix(\boldsymbol{q}-\boldsymbol{p})}}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}2E_{\mathbf{q}}}}\sum_{r,s=1,2}\left(a^{s\dagger}_{\mathbf{q}}u^{s\dagger}(\mathbf{q}) + b^s_{-\mathbf{q}}v^{s\dagger}(-\mathbf{q})\right)\frac{\Sigma^i}{2}\left(a^r_{\mathbf{p}}u^r(\mathbf{p}) + b^{r\dagger}_{-\mathbf{p}}v^r(-\mathbf{p})\right) =$$
$$= \int d^3x\frac{d^3pd^3q}{(2\pi)^6}\frac{e^{-ix(\boldsymbol{q}-\boldsymbol{p})}}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}2E_{\mathbf{q}}}}\sum_{r,s=1,2}\Big(u^{s\dagger}(\boldsymbol{q})\frac{\Sigma^i}{2}u^r(\boldsymbol{p})a^{s\dagger}_{\boldsymbol{q}}a^r_{\boldsymbol{p}} + u^{s^\dagger}(\boldsymbol{q})\frac{\Sigma^i}{2}v^r(-\boldsymbol{p})a^{s\dagger}_{\boldsymbol{q}}b^{r\dagger}_{-\boldsymbol{p}} +$$
$$+ v^{s\dagger}(-\boldsymbol{q})\frac{\Sigma^i}{2}u^r(\boldsymbol{p})b^s_{-\boldsymbol{q}}a^r_{\boldsymbol{p}} + v^{s\dagger}(-\boldsymbol{q})\frac{\Sigma^i}{2}v^r(-\boldsymbol{p})b^s_{-\boldsymbol{q}}b^{r\dagger}_{-\boldsymbol{p}}\Big). \tag{0.67}$$

Далее используя, что $\int d^3x e^{-ix(\boldsymbol{q}-\boldsymbol{p})} = (2\pi)^3\delta(\boldsymbol{q}-\boldsymbol{p})$, получим

$$J^i_{\text{spin}} = \int \frac{d^3p d^3q}{(2\pi)^3} \frac{\delta^{(3)}(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q})}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}} 2E_{\mathbf{q}}}} \sum_{r,s=1,2} \Big(u^{s\dagger}(\boldsymbol{q}) \frac{\Sigma^i}{2} u^r(\boldsymbol{p}) a^{s\dagger}_{\boldsymbol{q}} a^r_{\boldsymbol{p}} + u^{s^\dagger}(\boldsymbol{q}) \frac{\Sigma^i}{2} v^r(-\boldsymbol{p}) a^{s\dagger}_{\boldsymbol{q}} b^{r\dagger}_{-\boldsymbol{p}} +$$
$$+ v^{s\dagger}(-\boldsymbol{q}) \frac{\Sigma^i}{2} u^r(\boldsymbol{p}) b^s_{-\boldsymbol{q}} a^r_{\boldsymbol{p}} + v^{s\dagger}(-\boldsymbol{q}) \frac{\Sigma^i}{2} v^r(-\boldsymbol{p}) b^s_{-\boldsymbol{q}} b^{r\dagger}_{-\boldsymbol{p}} \Big) =$$
$$= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}} \sum_{r,s=1,2} \Big(u^{s\dagger}(\boldsymbol{p}) \frac{\Sigma^i}{2} u^r(\boldsymbol{p}) a^{s\dagger}_{\boldsymbol{p}} a^r_{\boldsymbol{p}} + u^{s^\dagger}(\boldsymbol{p}) \frac{\Sigma^i}{2} v^r(-\boldsymbol{p}) a^{s\dagger}_{\boldsymbol{p}} b^{r\dagger}_{-\boldsymbol{p}} +$$
$$+ v^{s\dagger}(-\boldsymbol{p}) \frac{\Sigma^i}{2} u^r(\boldsymbol{p}) b^s_{-\boldsymbol{p}} a^r_{\boldsymbol{p}} + v^{s\dagger}(-\boldsymbol{p}) \frac{\Sigma^i}{2} v^r(-\boldsymbol{p}) b^s_{-\boldsymbol{p}} b^{r\dagger}_{-\boldsymbol{p}} \Big). \tag{0.68}$$

Теперь вычисляем (используем, что $\sigma^i\sigma^j = \delta^{ij} + i\varepsilon^{ijk}\sigma^k$ и $[\sigma^i, \sigma^j] = 2i\varepsilon^{ijk}\sigma^k$ и $\mathfrak{s}\mathfrak{r} = 2|\boldsymbol{p}|$, $\varepsilon^{123} = 1$):

$$u^{s^\dagger}(\boldsymbol{p}) \frac{\Sigma^i}{2} v^r(-\boldsymbol{p}) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \xi^{s\dagger}\sqrt{p\cdot\sigma} & \xi^{s\dagger}\sqrt{p\cdot\bar\sigma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma^i & 0 \\ 0 & \sigma^i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{p\cdot\bar\sigma}\eta^r \\ -\sqrt{p\cdot\sigma}\eta^r \end{pmatrix} =$$
$$= \frac{1}{2}\xi^{s\dagger}(\sqrt{p\cdot\sigma}\sigma^i\sqrt{p\cdot\bar\sigma} - \sqrt{p\cdot\bar\sigma}\sigma^i\sqrt{p\cdot\sigma})\eta^r =$$
$$= \frac{1}{2}\xi^{s\dagger}((\frac{\mathfrak{s}}{2}\sigma^0 - \frac{\mathfrak{r}}{2}\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}}{|\boldsymbol{p}|})\sigma^i(\frac{\mathfrak{s}}{2}\sigma^0 + \frac{\mathfrak{r}}{2}\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}}{|\boldsymbol{p}|}) - (\frac{\mathfrak{s}}{2}\sigma^0 + \frac{\mathfrak{r}}{2}\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}}{|\boldsymbol{p}|})\sigma^i(\frac{\mathfrak{s}}{2}\sigma^0 - \frac{\mathfrak{r}}{2}\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}}{|\boldsymbol{p}|}))\eta^r =$$
$$= \frac{1}{2}\xi^{s\dagger}(2\frac{\mathfrak{s}\mathfrak{r}}{4|\boldsymbol{p}|}[\sigma^i, \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{p}])\eta^r = \frac{1}{2}\xi^{s\dagger}(2i\epsilon_{ijk}\sigma^k p^j)\eta^r = i\xi^{s\dagger}(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{\sigma})^i\eta^r,$$
$$v^{s^\dagger}(-\boldsymbol{p}) \frac{\Sigma^i}{2} u^r(\boldsymbol{p}) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \eta^{s\dagger}\sqrt{p\cdot\bar\sigma} & -\xi^{s\dagger}\sqrt{p\cdot\sigma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma^i & 0 \\ 0 & \sigma^i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{p\cdot\sigma}\xi^r \\ \sqrt{p\cdot\bar\sigma}\xi^r \end{pmatrix} =$$
$$= \frac{1}{2}\eta^{s\dagger}(\sqrt{p\cdot\bar\sigma}\sigma^i\sqrt{p\cdot\sigma} - \sqrt{p\cdot\sigma}\sigma^i\sqrt{p\cdot\bar\sigma})\xi^r = -i\eta^{s\dagger}(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{\sigma})^i\xi^r. \tag{0.69}$$

Далее имеем

$$u^{s^\dagger}(\boldsymbol{p}) \frac{\Sigma^i}{2} u^r(\boldsymbol{p}) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \xi^{s\dagger}\sqrt{p\cdot\sigma} & \xi^{s\dagger}\sqrt{p\cdot\bar\sigma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma^i & 0 \\ 0 & \sigma^i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{p\cdot\sigma}\xi^r \\ \sqrt{p\cdot\bar\sigma}\xi^r \end{pmatrix} =$$
$$= \frac{1}{2}\xi^{s\dagger}(\sqrt{p\cdot\sigma}\sigma^i\sqrt{p\cdot\sigma} + \sqrt{p\cdot\bar\sigma}\sigma^i\sqrt{p\cdot\bar\sigma})\xi^r =$$
$$= \frac{1}{2}\xi^{s\dagger}((\frac{\mathfrak{s}}{2}\sigma^0 - \frac{\mathfrak{r}}{2}\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}}{|\boldsymbol{p}|})\sigma^i(\frac{\mathfrak{s}}{2}\sigma^0 - \frac{\mathfrak{r}}{2}\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}}{|\boldsymbol{p}|}) + (\frac{\mathfrak{s}}{2}\sigma^0 + \frac{\mathfrak{r}}{2}\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}}{|\boldsymbol{p}|})\sigma^i(\frac{\mathfrak{s}}{2}\sigma^0 + \frac{\mathfrak{r}}{2}\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}}{|\boldsymbol{p}|}))\xi^r =$$
$$= \frac{1}{2}\xi^{s\dagger}(\frac{\mathfrak{s}^2}{2}\sigma^i + \frac{\mathfrak{r}^2}{2|\boldsymbol{p}|^2}\ \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{p}\sigma^i\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{p})\xi^r = \xi^{s\dagger}(m\sigma^i + (E_{\boldsymbol{p}} - m)\frac{\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{p}}{|\boldsymbol{p}|^2}p^i)\xi^r,$$
$$v^{s^\dagger}(-\boldsymbol{p}) \frac{\Sigma^i}{2} v^r(-\boldsymbol{p}) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \eta^{s\dagger}\sqrt{p\cdot\bar\sigma} & -\eta^{s\dagger}\sqrt{p\cdot\sigma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma^i & 0 \\ 0 & \sigma^i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{p\cdot\bar\sigma}\eta^r \\ -\sqrt{p\cdot\sigma}\eta^r \end{pmatrix} =$$
$$= \frac{1}{2}\eta^{s\dagger}(\sqrt{p\cdot\bar\sigma}\sigma^i\sqrt{p\cdot\bar\sigma} + \sqrt{p\cdot\sigma}\sigma^i\sqrt{p\cdot\sigma})\eta^r = \eta^{s\dagger}(m\sigma^i + (E_{\boldsymbol{p}} - m)\frac{\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{p}}{|\boldsymbol{p}|^2}p^i)\eta^r, \tag{0.70}$$

где мы использовали, что $\mathfrak{s}^2 = 2(E_{\boldsymbol{p}} + m)$ и $\mathfrak{r}^2 = 2(E_{\boldsymbol{p}} - m)$, а также

$$\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{p}\sigma^i\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{p} = \sigma^j\sigma^i\sigma^k p^j p^k = (\delta^{ji} + i\varepsilon^{jil}\sigma^l)\sigma^k p^j p^k = p^i\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{p} + i\varepsilon^{jil}\sigma^l\sigma^k p^j p^k =$$
$$= p^i\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{p} + i\varepsilon^{jil}(\delta^{lk} + i\varepsilon^{lkm}\sigma^m)p^j p^k = p^i\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{p} + i\varepsilon^{jil}p^j p^l - \varepsilon^{jil}\varepsilon^{lkm}\sigma^m p^j p^k =$$
$$= p^i\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{p} - (\delta^{jk}\delta^{im} - \delta^{jm}\delta^{ik})\sigma^m p^j p^k = 2p^i\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{p} - |\boldsymbol{p}|^2\sigma^i. \tag{0.71}$$

В итоге получаем

$$J^i_{\text{spin}} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\mathbf{p}}}\sum_{r,s=1,2}\big(\xi^{s\dagger}(m\sigma^i + (E_{\boldsymbol{p}}-m)\frac{\boldsymbol{\sigma p}}{|\boldsymbol{p}|^2}p^i)\xi^r a^{s\dagger}_{\boldsymbol{p}}a^r_{\boldsymbol{p}} + i\xi^{s\dagger}(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{\sigma})^i\eta^r a^{s\dagger}_{\boldsymbol{p}}b^{r\dagger}_{-\boldsymbol{p}} -$$
$$- i\eta^{s\dagger}(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{\sigma})^i\xi^r b^s_{-\boldsymbol{p}}a^r_{\boldsymbol{p}} + \eta^{s\dagger}(m\sigma^i + (E_{\boldsymbol{p}}-m)\frac{\boldsymbol{\sigma p}}{|\boldsymbol{p}|^2}p^i)\eta^r b^s_{-\boldsymbol{p}}b^{r\dagger}_{-\boldsymbol{p}}\big). \quad (0.72)$$

Орбитальная часть: Для орбитальной компоненты имеем

$$J^i_{\text{orbit}} = \int d^3x\psi^\dagger(x)(-i(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{\nabla})^i)\psi(x) =$$
$$= \int d^3x\frac{d^3qd^3p}{(2\pi)^6}\frac{e^{-i\boldsymbol{xq}}}{\sqrt{2E_{\boldsymbol{p}}2E_{\boldsymbol{q}}}}\sum_{s,r=1,2}\big(a^{s\dagger}_{\boldsymbol{q}}u^{s\dagger}(\boldsymbol{q}) + b^s_{-\boldsymbol{q}}v^{s\dagger}(-\boldsymbol{q})\big)(-i\varepsilon^{ijk}x^j\frac{\partial}{\partial x^k})e^{i\boldsymbol{px}}\big(a^r_{\boldsymbol{p}}u^r(\boldsymbol{p}) + b^{r\dagger}_{-\boldsymbol{p}}v^r(-\boldsymbol{p})\big) =$$
$$= \int \frac{d^3qd^3p}{(2\pi)^6}d^3x\frac{\varepsilon^{ijk}x^je^{i\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q})}}{\sqrt{2E_{\boldsymbol{p}}2E_{\boldsymbol{q}}}}\sum_{s,r=1,2}\big(a^{s\dagger}_{\boldsymbol{q}}u^{s\dagger}(\boldsymbol{q}) + b^s_{-\boldsymbol{q}}v^{s\dagger}(-\boldsymbol{q})\big)p^k\big(a^r_{\boldsymbol{p}}u^r(\boldsymbol{p}) + b^{r\dagger}_{-\boldsymbol{p}}v^r(-\boldsymbol{p})\big) =$$
$$= \int \frac{d^3qd^3p}{(2\pi)^6}\frac{-i(2\pi)^3\varepsilon^{ijk}\frac{\partial\delta^{(3)}(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q})}{\partial p^j}}{\sqrt{2E_{\boldsymbol{p}}2E_{\boldsymbol{q}}}}\sum_{s,r=1,2}\big(a^{s\dagger}_{\boldsymbol{q}}u^{s\dagger}(\boldsymbol{q}) + b^s_{-\boldsymbol{q}}v^{s\dagger}(-\boldsymbol{q})\big)p^k\big(a^r_{\boldsymbol{p}}u^r(\boldsymbol{p}) + b^{r\dagger}_{-\boldsymbol{p}}v^r(-\boldsymbol{p})\big) =$$
$$= i\int \frac{d^3q}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\boldsymbol{q}}}}\sum_{s,r=1,2}\big(a^{s\dagger}_{\boldsymbol{q}}u^{s\dagger}(\boldsymbol{q}) + b^s_{-\boldsymbol{q}}v^{s\dagger}(-\boldsymbol{q})\big)\varepsilon^{ijk}\frac{\partial}{\partial q^j}\big(q^k\frac{1}{\sqrt{2E_{\boldsymbol{q}}}}\big(a^r_{\boldsymbol{q}}u^r(\boldsymbol{q}) + b^{r\dagger}_{-\boldsymbol{q}}v^r(-\boldsymbol{q})\big)\big), \quad (0.73)$$

далее мы используем, что $\varepsilon^{ijk}\frac{\partial}{\partial q^j}q^k = \varepsilon^{ijk}\delta^{jk} = 0$ и также $\varepsilon^{ijk}q^k\frac{\partial}{\partial q^j}f(|\boldsymbol{q}|) = \varepsilon^{ijk}q^k\frac{q^j}{|\boldsymbol{q}|}f'(|\boldsymbol{q}|) = 0$, где f — произвольная функция. Отсюда в частности следует, что $\varepsilon^{ijk}q^k\frac{\partial}{\partial q^j}\frac{1}{\sqrt{2E_{\boldsymbol{q}}}} = 0$, так как $E_{\boldsymbol{q}} = \sqrt{m^2 + |\boldsymbol{q}|^2}$. В итоге мы получаем (заменяя $\boldsymbol{q}$ на $\boldsymbol{p}$)

$$J^i_{\text{orbit}} = -i\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\boldsymbol{p}}}\sum_{s,r=1,2}\big(a^{s\dagger}_{\boldsymbol{p}}u^{s\dagger}(\boldsymbol{p}) + b^s_{-\boldsymbol{p}}v^{s\dagger}(-\boldsymbol{p})\big)\varepsilon^{ijk}p^j\frac{\partial}{\partial p^k}\big(a^r_{\boldsymbol{p}}u^r(\boldsymbol{p}) + b^{r\dagger}_{-\boldsymbol{p}}v^r(-\boldsymbol{p})\big), \quad (0.74)$$

далее используя, что $u^{s\dagger}(\boldsymbol{p})u^r(\boldsymbol{p}) = v^{s\dagger}(-\boldsymbol{p})v^r(-\boldsymbol{p}) = 2E_{\boldsymbol{p}}\delta^{rs}$, и $u^{s\dagger}(\boldsymbol{p})v^r(-\boldsymbol{p}) = v^{s\dagger}(-\boldsymbol{p})u^r(\boldsymbol{p}) = 0$, получаем

$$J^i_{\text{orbit}} = -i\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\sum_{s=1,2}\varepsilon^{ijk}(a^{s\dagger}_{\boldsymbol{p}}p^j\frac{\partial a^s_{\boldsymbol{p}}}{\partial p^k} + b^s_{-\boldsymbol{p}}p^j\frac{\partial b^{s\dagger}_{-\boldsymbol{p}}}{\partial p^k}) -$$
$$- i\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\boldsymbol{p}}}\sum_{s,r=1,2}\varepsilon^{ijk}\big(u^{s\dagger}(\boldsymbol{p})p^j\frac{\partial u^r(\boldsymbol{p})}{\partial p^k}a^{s\dagger}_{\boldsymbol{p}}a^r_{\boldsymbol{p}} + u^{s\dagger}(\boldsymbol{p})p^j\frac{\partial v^r(-\boldsymbol{p})}{\partial p^k}a^{s\dagger}_{\boldsymbol{p}}b^{r\dagger}_{-\boldsymbol{p}} +$$
$$+ v^{s\dagger}(-\boldsymbol{p})p^j\frac{\partial u^r(\boldsymbol{p})}{\partial p^k}b^s_{-\boldsymbol{p}}a^r_{\boldsymbol{p}} + v^{s\dagger}(-\boldsymbol{p})p^j\frac{\partial v^r(-\boldsymbol{p})}{\partial p^k}b^s_{-\boldsymbol{p}}b^{r\dagger}_{-\boldsymbol{p}}\big). \quad (0.75)$$

Используя, что $\varepsilon^{ijk}p^j\frac{\partial}{\partial p^k}\mathfrak{s} = \varepsilon^{ijk}p^j\frac{\partial}{\partial p^k}\frac{\mathfrak{r}}{2|\boldsymbol{p}|} = 0$, где $\mathfrak{s} = \sqrt{p^0 + |\boldsymbol{p}|} + \sqrt{p^0 - |\boldsymbol{p}|}$, а $\mathfrak{r} = \sqrt{p^0 + |\boldsymbol{p}|} - \sqrt{p^0 - |\boldsymbol{p}|}$, получим

$$\varepsilon^{ijk}p^j\frac{\partial}{\partial p^k}\sqrt{p\cdot\sigma} = \varepsilon^{ijk}p^j\frac{\partial}{\partial p^k}(\frac{\mathfrak{s}}{2}\sigma^0 - \frac{\mathfrak{r}}{2|\boldsymbol{p}|}p^l\sigma^l) = -\frac{\mathfrak{r}}{2|\boldsymbol{p}|}\varepsilon^{ijk}p^j\sigma^k = -\frac{\mathfrak{r}}{2|\boldsymbol{p}|}(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{\sigma})^i,$$
$$\varepsilon^{ijk}p^j\frac{\partial}{\partial p^k}\sqrt{p\cdot\bar{\sigma}} = \frac{\mathfrak{r}}{2|\boldsymbol{p}|}\varepsilon^{ijk}p^j\sigma^k = \frac{\mathfrak{r}}{2|\boldsymbol{p}|}(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{\sigma})^i, \quad (0.76)$$

откуда находим

$$
\begin{aligned}
u^{s\dagger}(\boldsymbol{p})\varepsilon^{ijk}p^j\frac{\partial v^r(-\boldsymbol{p})}{\partial p^k} &= \xi^{s\dagger}(\sqrt{p\cdot\sigma}\varepsilon^{ijk}p^j\frac{\partial}{\partial p^k}\sqrt{p\cdot\bar\sigma}-\sqrt{p\cdot\bar\sigma}\varepsilon^{ijk}p^j\frac{\partial}{\partial p^k}\sqrt{p\cdot\sigma})\eta^r = \\
&= \xi^{s\dagger}(\frac{\mathfrak{s}\mathfrak{r}}{2|\boldsymbol{p}|}\varepsilon^{ijk}p^j\sigma^k)\eta^r = \xi^{s\dagger}(\varepsilon^{ijk}p^j\sigma^k)\eta^r = \xi^{s\dagger}(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{\sigma})^i\eta^r, \\
v^{s\dagger}(-\boldsymbol{p})\varepsilon^{ijk}p^j\frac{\partial u^r(\boldsymbol{p})}{\partial p^k} &= \eta^{s\dagger}(\sqrt{p\cdot\bar\sigma}\varepsilon^{ijk}p^j\frac{\partial}{\partial p^k}\sqrt{p\cdot\sigma}-\sqrt{p\cdot\sigma}\varepsilon^{ijk}p^j\frac{\partial}{\partial p^k}\sqrt{p\cdot\bar\sigma})\xi^r = \\
&= -\eta^{s\dagger}(\frac{\mathfrak{s}\mathfrak{r}}{2|\boldsymbol{p}|}\varepsilon^{ijk}p^j\sigma^k)\xi^r = -\eta^{s\dagger}(\varepsilon^{ijk}p^j\sigma^k)\xi^r = -\eta^{s\dagger}(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{\sigma})^i\xi^r.
\end{aligned} \tag{0.77}
$$

Далее находим

$$
\begin{aligned}
u^{s\dagger}(\boldsymbol{p})\varepsilon^{ijk}p^j\frac{\partial u^r(\boldsymbol{p})}{\partial p^k} &= \xi^{s\dagger}(\sqrt{p\cdot\sigma}\varepsilon^{ijk}p^j\frac{\partial}{\partial p^k}\sqrt{p\cdot\sigma}+\sqrt{p\cdot\bar\sigma}\varepsilon^{ijk}p^j\frac{\partial}{\partial p^k}\sqrt{p\cdot\bar\sigma})\xi^r = \\
&= \xi^{s\dagger}(\frac{\mathfrak{r}^2}{2|\boldsymbol{p}|^2}(\boldsymbol{\sigma p})(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{\sigma})^i)\xi^r = i\xi^{s\dagger}((E_{\boldsymbol{p}}-m)\sigma^i-(E_{\boldsymbol{p}}-m)\frac{\boldsymbol{\sigma p}}{|\boldsymbol{p}|^2}p^i)\xi^r, \\
v^{s\dagger}(-\boldsymbol{p})\varepsilon^{ijk}p^j\frac{\partial v^r(-\boldsymbol{p})}{\partial p^k} &= \eta^{s\dagger}(\sqrt{p\cdot\bar\sigma}\varepsilon^{ijk}p^j\frac{\partial}{\partial p^k}\sqrt{p\cdot\bar\sigma}+\sqrt{p\cdot\sigma}\varepsilon^{ijk}p^j\frac{\partial}{\partial p^k}\sqrt{p\cdot\sigma})\eta^r = \\
&= \eta^{s\dagger}(\frac{\mathfrak{r}^2}{2|\boldsymbol{p}|^2}(\boldsymbol{\sigma p})(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{\sigma})^i)\eta^r = i\eta^{s\dagger}((E_{\boldsymbol{p}}-m)\sigma^i-(E_{\boldsymbol{p}}-m)\frac{\boldsymbol{\sigma p}}{|\boldsymbol{p}|^2}p^i)\eta^r,
\end{aligned} \tag{0.78}
$$

где мы использовали, что $\mathfrak{r}^2 = 2(E_{\boldsymbol{p}}-m)$, а также

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{\sigma p})(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{\sigma})^i &= \varepsilon^{ijk}\sigma^l\sigma^k p^l p^j = \varepsilon^{ijk}(\delta^{lk}+i\varepsilon^{lkm}\sigma^m)p^l p^j = i\varepsilon^{ijk}\varepsilon^{mlk}\sigma^m p^l p^j = \\
&= i(\delta^{im}\delta^{jl}-\delta^{il}\delta^{jm})\sigma^m p^l p^j = i(|\boldsymbol{p}|^2\sigma^i - p^i\boldsymbol{\sigma p}).
\end{aligned} \tag{0.79}
$$

В итоге получаем

$$
\begin{aligned}
J^i_{\text{orbit}} = &-i\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\sum_{s=1,2}\varepsilon^{ijk}(a^{s\dagger}_{\boldsymbol{p}}p^j\frac{\partial a^s_{\boldsymbol{p}}}{\partial p^k}+b^s_{-\boldsymbol{p}}p^j\frac{\partial b^{s\dagger}_{-\boldsymbol{p}}}{\partial p^k})+ \\
&+\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\boldsymbol{p}}}\sum_{s,r=1,2}\big(\xi^{s\dagger}((E_{\boldsymbol{p}}-m)\sigma^i-(E_{\boldsymbol{p}}-m)\frac{\boldsymbol{\sigma p}}{|\boldsymbol{p}|^2}p^i)\xi^r a^{s\dagger}_{\boldsymbol{p}}a^r_{\boldsymbol{p}} - i\xi^{s\dagger}(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{\sigma})^i\eta^r a^{s\dagger}_{\boldsymbol{p}}b^{r\dagger}_{-\boldsymbol{p}}+ \\
&+ i\eta^{s\dagger}(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{\sigma})^i\xi^r b^s_{-\boldsymbol{p}}a^r_{\boldsymbol{p}}+\eta^{s\dagger}((E_{\boldsymbol{p}}-m)\sigma^i-(E_{\boldsymbol{p}}-m)\frac{\boldsymbol{\sigma p}}{|\boldsymbol{p}|^2}p^i)\eta^r b^s_{-\boldsymbol{p}}b^{r\dagger}_{-\boldsymbol{p}}\big).
\end{aligned} \tag{0.80}
$$

В итоге находи для J^i:

$$
\begin{aligned}
J^i = J^i_{\text{spin}}+J^i_{\text{orbit}} = &-i\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\sum_{s=1,2}\varepsilon^{ijk}(a^{s\dagger}_{\boldsymbol{p}}p^j\frac{\partial a^s_{\boldsymbol{p}}}{\partial p^k}+b^s_{-\boldsymbol{p}}p^j\frac{\partial b^{s\dagger}_{-\boldsymbol{p}}}{\partial p^k})+ \\
&+\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\sum_{s,r=1,2}\big(\xi^{s\dagger}\frac{\sigma^i}{2}\xi^r a^{s\dagger}_{\boldsymbol{p}}a^r_{\boldsymbol{p}}+\eta^{s\dagger}\frac{\sigma^i}{2}\eta^r b^s_{-\boldsymbol{p}}b^{r\dagger}_{-\boldsymbol{p}}\big).
\end{aligned} \tag{0.81}
$$

Антикоммутируя $b^s_{-\boldsymbol{p}}b^{r\dagger}_{-\boldsymbol{p}}$ и выкидывая бесконечные константы, а также заменяя в данных членах $\boldsymbol{p}\to-\boldsymbol{p}$, получаем

$$
J^i = -i\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\sum_{s=1,2}\varepsilon^{ijk}(a^{s\dagger}_{\boldsymbol{p}}p^j\frac{\partial a^s_{\boldsymbol{p}}}{\partial p^k}+b^{s\dagger}_{\boldsymbol{p}}p^j\frac{\partial b^s_{\boldsymbol{p}}}{\partial p^k})+\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\sum_{s,r=1,2}\big(\xi^{s\dagger}\frac{\sigma^i}{2}\xi^r a^{s\dagger}_{\boldsymbol{p}}a^r_{\boldsymbol{p}}-\eta^{s\dagger}\frac{\sigma^i}{2}\eta^r b^{r\dagger}_{\boldsymbol{p}}b^s_{\boldsymbol{p}}\big). \tag{0.82}
$$

Это выражение можно переписать как

$$\boldsymbol{J} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sum_{s,r=1,2} \big(a_{\boldsymbol{p}}^{s\dagger} \xi^{s\dagger} (\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} - i\delta^{rs} \boldsymbol{p} \times \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{p}}) \xi^r a_{\boldsymbol{p}}^r - b_{\boldsymbol{p}}^{r\dagger} \eta^{s\dagger} (\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} + i\delta^{rs} \boldsymbol{p} \times \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{p}}) \eta^r b_{\boldsymbol{p}}^s \big). \tag{0.83}$$

Далее, очевидно, что $\boldsymbol{J}|0\rangle = 0$. Теперь, так как $\boldsymbol{J}|0\rangle = 0$, имеем $\boldsymbol{J} a_0^{s\dagger}|0\rangle = [\boldsymbol{J}, a_0^{s\dagger}]|0\rangle$. Вычисляя коммутатор $[a_{\boldsymbol{p}}^{r'\dagger} a_{\boldsymbol{p}}^r, a_0^{s\dagger}] = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\boldsymbol{p}) a_0^{r'\dagger} \delta^{rs}$, мы видим, что должны взять все в точке $\boldsymbol{p} = 0$, откуда находим, что $\boldsymbol{J} a_0^{s\dagger}|0\rangle = \sum_{r'} \big(\xi^{r'\dagger} \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} \xi^s\big) a_0^{r'\dagger}|0\rangle$.

◯ **33.** Покажите, что запаздывающая функция Грина для уравнения Дирака есть $S_R^{ab}(x-y) = (i\not{\partial}_x + m)_{ab} D_R(x-y)$, где $D_R(x-y)$ запаздывающая функция Грина для уравнения Клейна-Гордона.

Решение: С одной стороны мы имеем

$$S_R^{ab}(x-y) \equiv \theta(x^0 - y^0)) \langle 0 | \{\psi_a(x), \bar{\psi}_b(y)\} | 0 \rangle, \tag{0.84}$$

с другой стороны можно вычислить

$$\begin{aligned} \langle 0|\psi_a(x)\bar{\psi}_b(y)|0\rangle &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\boldsymbol{p}}} \sum_{s=1,2} u_a^s(p) \bar{u}_b^s(p) e^{-ip\cdot(x-y)} = (i\not{\partial}_x + m)_{ab} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\boldsymbol{p}}} e^{-ip\cdot(x-y)}, \\ \langle 0|\bar{\psi}_b(y)\psi_a(x)|0\rangle &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\boldsymbol{p}}} \sum_{s=1,2} v_a^s(p) \bar{v}_b^s(p) e^{-ip\cdot(y-x)} = -(i\not{\partial}_x + m)_{ab} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\boldsymbol{p}}} e^{-ip\cdot(y-x)}, \end{aligned} \tag{0.85}$$

откуда

$$\langle 0|\{\psi_a(x), \bar{\psi}_b(y)\}|0\rangle = (i\not{\partial}_x + m)_{ab} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\boldsymbol{p}}} (e^{-ip\cdot(x-y)} - e^{-ip\cdot(y-x)}) = (i\not{\partial}_x + m)_{ab} \langle 0|[\phi(x), \phi(y)]|0\rangle. \tag{0.86}$$

В итоге получаем

$$\begin{aligned} S_R^{ab}(x-y) &\equiv \theta(x^0 - y^0)) \langle 0|\{\psi_a(x), \bar{\psi}_b(y)\}|0\rangle = (i\not{\partial}_x + m)_{ab} \theta(x^0 - y^0)) \langle 0|[\phi(x), \phi(y)]|0\rangle = \\ &= (i\not{\partial}_x + m)_{ab} D_R(x-y), \end{aligned} \tag{0.87}$$

что и требовалось показать. ◯

◯ **34.** Покажите, что $\not{\partial}\not{\partial} = \partial^2$.

Решение: Имеем

$$\not{\partial}\not{\partial} = \gamma^\mu \partial_\mu \gamma^\nu \partial_\nu = \gamma^\mu \gamma^\nu \partial_\mu \partial_\nu = \frac{1}{2}(\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu) \partial_\mu \partial_\nu = g^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu = \partial^2, \tag{0.88}$$

что и требовалось показать. ◯

3.6 Дискретные симметрии в теории Дирака.

◯ **35.** Проверьте, что все величины: $\bar{\psi}\psi$, $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$, $i\bar{\psi}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]\psi$, $\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi$, $i\bar{\psi}\gamma^5\psi$ являются эрмитовыми.

Решение: Используя то, что $(\gamma^0)^\dagger = \gamma^0$, $(\gamma^5)^\dagger = \gamma^5$, а $(\gamma^i)^\dagger = -\gamma^i$, $i = 1,2,3$, а также, что $\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0$, $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$ имеем:

$$
\begin{aligned}
&(\bar\psi\psi)^\dagger = (\psi^\dagger\gamma^0\psi)^\dagger = \psi^\dagger(\gamma^0)^\dagger\psi = \psi^\dagger\gamma^0\psi = \bar\psi\psi,\\
&(\bar\psi\gamma^\mu\psi)^\dagger = (\psi^\dagger\gamma^0\gamma^\mu\psi)^\dagger = \psi^\dagger(\gamma^\mu)^\dagger(\gamma^0)^\dagger\psi = \psi^\dagger\gamma^0\gamma^\mu\psi = \bar\psi\gamma^\mu\psi,\\
&(i\bar\psi[\gamma^\mu,\gamma^\nu]\psi)^\dagger = (i\psi^\dagger\gamma^0[\gamma^\mu,\gamma^\nu]\psi)^\dagger = -i\psi^\dagger((\gamma^\nu)^\dagger(\gamma^\mu)^\dagger - (\gamma^\mu)^\dagger(\gamma^\nu)^\dagger)\gamma^0\psi = i\bar\psi[\gamma^\mu,\gamma^\nu]\psi,\\
&(\bar\psi\gamma^\mu\gamma^5\psi)^\dagger = \psi^\dagger(\gamma^5)^\dagger(\gamma^\mu)^\dagger\gamma^0\psi = \psi^\dagger\gamma^5\gamma^0\gamma^\mu\psi = \bar\psi\gamma^\mu\gamma^5\psi,\\
&(i\bar\psi\gamma^5\psi)^\dagger = -i\psi^\dagger(\gamma^5)^\dagger(\gamma^0)^\dagger\psi = -i\psi^\dagger\gamma^5\gamma^0\psi = i\bar\psi\gamma^5\psi,
\end{aligned}
\tag{0.89}
$$

что и требовалось проверить. ◯

◯ **36.** Покажите, что

$$
\gamma^0\gamma^\mu\gamma^0 = \begin{cases} +\gamma^\mu, & \mu = 0,\\ -\gamma^\mu, & \mu = 1,2,3. \end{cases}
$$

Решение: Используя то, что $(\gamma^0)^2 = 1$, а также $\{\gamma^0, \gamma^i\} = 0$, $i = 1,2,3$, получаем

$$
\gamma^0\gamma^0\gamma^0 = \gamma^0, \quad \gamma^0\gamma^i\gamma^0 = -\gamma^i\gamma^0\gamma^0 = -\gamma^i,
\tag{0.90}
$$

что и требовалось показать. ◯

◯ **37.** Проверьте, что

$$
T\bar\psi\gamma^\mu\psi T = \begin{cases} +\bar\psi\gamma^\mu\psi(-t,\mathbf{x}), & \mu = 0\\ -\bar\psi\gamma^\mu\psi(-t,\mathbf{x}), & \mu = 1,2,3. \end{cases}
$$

Решение: Используя, что $T(c-\text{число}) = (c-\text{число})^*T$, и также $T\psi(t,\boldsymbol{x})T = \gamma^1\gamma^3\psi(-t,\boldsymbol{x})$, получим

$$
\begin{aligned}
T\bar\psi\gamma^\mu\psi T = T\bar\psi T(\gamma^\mu)^* T\psi T = \psi^\dagger(-t,\boldsymbol{x})[\gamma^1\gamma^3]^\dagger(\gamma)^0(\gamma^\mu)^*\gamma^1\gamma^3\psi(-t,\boldsymbol{x}) =\\
= \bar\psi(-t,\boldsymbol{x})(-\gamma^1\gamma^3)(\gamma^\mu)^*\gamma^1\gamma^3\psi(-t,\boldsymbol{x}).
\end{aligned}
\tag{0.91}
$$

Теперь используя, что $(\gamma^0)^* = \gamma^0$, $(\gamma^1)^* = \gamma^1$, $(\gamma^3)^* = \gamma^3$ и $(\gamma^2)^* = -\gamma^2$, $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$, получим

$$
\begin{aligned}
&T\bar\psi\gamma^0\psi T = \bar\psi(-t,\boldsymbol{x})(-\gamma^1\gamma^3)\gamma^0\gamma^1\gamma^3\psi(-t,\boldsymbol{x}) = \bar\psi\gamma^0\psi(-t,\boldsymbol{x}),\\
&T\bar\psi\gamma^1\psi T = \bar\psi(-t,\boldsymbol{x})(-\gamma^1\gamma^3)\gamma^1\gamma^1\gamma^3\psi(-t,\boldsymbol{x}) = -\bar\psi\gamma^1\psi(-t,\boldsymbol{x}),\\
&T\bar\psi\gamma^2\psi T = -\bar\psi(-t,\boldsymbol{x})(-\gamma^1\gamma^3)\gamma^2\gamma^1\gamma^3\psi(-t,\boldsymbol{x}) = -\bar\psi\gamma^2\psi(-t,\boldsymbol{x}),\\
&T\bar\psi\gamma^3\psi T = \bar\psi(-t,\boldsymbol{x})(-\gamma^1\gamma^3)\gamma^3\gamma^1\gamma^3\psi(-t,\boldsymbol{x}) = -\bar\psi\gamma^3\psi(-t,\boldsymbol{x}),
\end{aligned}
\tag{0.92}
$$

что и требовалось проверить. ◯

◯ **38.** Найдите чему равно преобразование зарядового сопряжения для биллинейных форм:

$$
C\bar\psi\psi C,\ C\bar\psi\gamma^\mu\psi C,\ Ci\bar\psi[\gamma^\mu,\gamma^\nu]\psi C,\ C\bar\psi\gamma^\mu\gamma^5\psi C,\ Ci\bar\psi\gamma^5\psi C.
$$

Решение: Используя, что $C\psi(x)C = -i(\bar\psi\gamma^0\gamma^2)^T$, и также $C\bar\psi C = (-i\gamma^0\gamma^2\psi)^T$ имеем:

$$
\begin{aligned}
&C\bar\psi\psi C = (-i\gamma^0\gamma^2\psi)^T(-i\bar\psi\gamma^0\gamma^2)^T = -\gamma^0_{ab}\gamma^2_{bc}\psi_c\bar\psi_d\gamma^0_{de}\gamma^2_{ea} = \bar\psi_d\gamma^0_{de}\gamma^2_{ea}\gamma^0_{ab}\gamma^2_{bc}\psi_c = -\bar\psi\gamma^2\gamma^0\gamma^0\gamma^2\psi = \bar\psi\psi,\\
&Ci\bar\psi\gamma^5\psi C = i(-i\gamma^0\gamma^2\psi)^T\gamma^5(-i\bar\psi\gamma^0\gamma^2)^T = i\bar\psi\gamma^5\psi,
\end{aligned}
\tag{0.93}
$$

аналогично можно проверить для остальных выражений. ◯