Экзамен.

(Для тех кто решает в классе, достаточно решить только первую задачу)

1. Перенормировка безмассовой теории ϕ^4

В этой задаче мы будем изучать перенормировку безмассовой теории ϕ^4 в 4 мерном Евклидовом пространстве используя метод размерной регуляризации. Статистическая сумма нашей теории записывается как

$$Z = \int D\phi_0 \exp\big(- \int d^4x (\frac{1}{2}(\partial_\mu \phi_0)^2 + \frac{1}{2} m_0^2 \phi_0^2 + \frac{\lambda_0}{4!}\phi_0^4)\big), \tag{0.1}$$

где m_0 называется “затравочной"(“голой”) массой и λ_0 затравочная константа связи. Мы вводим новое поле ϕ и константу связи $\lambda(\mu)$ по формулам

$$\begin{aligned} &\phi_0 = Z^{1/2}(\mu)\phi, \\ &m_0^2 = Z^{-1}(\mu)\delta m^2, \\ &\lambda_0 = Z^{-2}(\mu)(\lambda(\mu) + \delta\lambda(\mu)), \end{aligned} \tag{0.2}$$

где $\delta Z(\mu) = Z(\mu) - 1$, $\delta m^2 = Z(\mu) m_0^2$ и $\delta\lambda(\mu) = Z^2(\mu)\lambda_0 - \lambda(\mu)$ контрчлены, а μ вспомогательный масштаб. Статистическая сумма запишется как

$$Z = \int D\phi \exp\big(- \int d^4x (\frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 + \frac{\lambda(\mu)}{4!}\phi^4 + \frac{\delta Z(\mu)}{2}(\partial_\mu\phi)^2 + \frac{1}{2}\delta m^2(\mu)\phi^2 + \frac{\delta\lambda(\mu)}{4!}\phi^4)\big). \tag{0.3}$$

Ренормализационные условия в данном случае записываются как

$$\begin{aligned} &\Gamma^{(2)}(0) = 0, \\ &\frac{d\Gamma^{(2)}}{dp^2}\Big|_{p^2=\mu^2} = 1, \\ &\Gamma^{(4)}\big|_{p_i=\mu e_i} = \lambda(\mu), \end{aligned} \tag{0.4}$$

где $e_1, e_2, .., e_4$ 4-вектора, такие, что $e_1 + e_2 + e_3 + e_4 = 0$ и $p_i^2 = 3\mu^2$, $p_i \cdot p_j = -\mu^2$ [1]. Мы опять предполагаем, что все контрчлены могут быть вычисленны шаг за шагом по степеням $\lambda(\mu)$:

$$\begin{aligned} &\delta Z(\mu) = z^{(2)}(\mu)\lambda^2(\mu) + ..., \\ &\delta m^2(\mu) = b^{(1)}(\mu)\lambda(\mu) + ..., \\ &\delta\lambda(\mu) = a^{(2)}(\mu)\lambda^2(\mu) + ..., \end{aligned} \tag{0.5}$$

с коэффициентами, которые определяются из наших ренормализационных условий.

Вычислите перенормировку для $\Gamma^{(2)}$ и $\Gamma^{(4)}$ до порядка $\lambda^2(\mu)$ включительно. Найдите коэффициенты $z^{(2)}(\mu)$, $b^{(1)}(\mu)$, $b^{(2)}(\mu)$, $a^{(2)}(\mu)$. При вычислении вам может понадобиться интеграл

$$\int \frac{d^dk}{k^2} = 0 \tag{0.6}$$

В методе размерной регуляризации этот интеграл действительно равен нулю, подумайте почему.

[1] Например можно взять $e_1 = (\sqrt{3}, 0, 0, 0)$, $e_2 = (-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, 0, 0)$, $e_3 = (-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \sqrt{2}, 0)$, $e_4 = (-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, -\sqrt{2}, 0)$.

2. Бета-функция безмассовой теории ϕ^6
Рассмотрите безмассовую теорию ϕ^6 в $d = 3$ Евклидовом пространстве. Действие теории

$$S = \int d^3x \left(\frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 + \frac{\lambda}{6!}\phi^6 + \text{контрчлены} \right). \tag{0.7}$$

Вычислите ведущий член в бета-функции $\beta(\lambda)$.

3. Задача 11.1 из Пескина-Шредера.