Экзамен. Перенормировка безмассовой теории ϕ^4

Решение:

В этой задаче мы будем изучать перенормировку безмассовой теории ϕ^4 в 4 мерном Евклидовом пространстве используя метод размерной регуляризации. Статистическая сумма нашей теории записывается как

$$Z = \int D\phi_0 \exp\big(- \int d^4x (\frac{1}{2}(\partial_\mu \phi_0)^2 + \frac{1}{2} m_0^2 \phi_0^2 + \frac{\lambda_0}{4!}\phi_0^4)\big), \tag{0.1}$$

где m_0 называется “затравочной"(“голой”) массой и λ_0 затравочная константа связи. Мы вводим новое поле ϕ и константу связи $\lambda(\mu)$ по формулам

$$\begin{aligned} &\phi_0 = Z^{1/2}(\mu)\phi, \\ &m_0^2 = Z^{-1}(\mu)\delta m^2, \\ &\lambda_0 = Z^{-2}(\mu)(\lambda(\mu) + \delta\lambda(\mu)), \end{aligned} \tag{0.2}$$

где $\delta Z(\mu) = Z(\mu) - 1$, $\delta m^2 = Z(\mu) m_0^2$ и $\delta\lambda(\mu) = Z^2(\mu)\lambda_0 - \lambda(\mu)$ контрчлены, а μ вспомогательный масштаб. Статистическая сумма запишется как

$$Z = \int D\phi \exp\big(- \int d^4x (\frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 + \frac{\lambda(\mu)}{4!}\phi^4 + \frac{\delta Z(\mu)}{2}(\partial_\mu\phi)^2 + \frac{1}{2}\delta m^2(\mu)\phi^2 + \frac{\delta\lambda(\mu)}{4!}\phi^4)\big). \tag{0.3}$$

Ренормализационные условия в данном случае записываются как

$$\begin{aligned} &\Gamma^{(2)}(0) = 0, \\ &\frac{d\Gamma^{(2)}}{dp^2}\Big|_{p^2=\mu^2} = 1, \\ &\Gamma^{(4)}\big|_{p_i = \mu e_i} = \lambda(\mu), \end{aligned} \tag{0.4}$$

где $e_1, e_2, .., e_4$ 4-вектора, такие, что $e_1 + e_2 + e_3 + e_4 = 0$ и $p_i^2 = 3\mu^2$, $p_i \cdot p_j = -\mu^2$[1]. Мы опять предполагаем, что все контрчлены могут быть вычисленны шаг за шагом по степеням $\lambda(\mu)$:

$$\begin{aligned} &\delta Z(\mu) = z^{(2)}(\mu)\lambda^2(\mu) + ..., \\ &\delta m^2(\mu) = b^{(1)}(\mu)\lambda(\mu) + ..., \\ &\delta\lambda(\mu) = a^{(2)}(\mu)\lambda^2(\mu) + ..., \end{aligned} \tag{0.5}$$

с коэффициентами, которые определяются из наших ренормализационных условий.

В первой петле для $\Sigma(p^2)$ мы имеем:

Найдем коэффициенты $z^{(1)}$ и $b^{(1)}$ для контчленов δZ и δm^2, исходя из ренормализационных условий $\Sigma(0) = \Sigma'(0) = 0$. Получаем

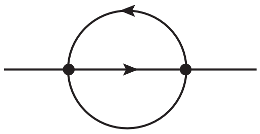
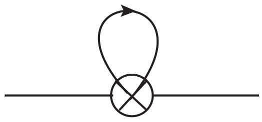
$$-\Sigma(p^2) = -\frac{\lambda}{2}\int \frac{d^dk}{(2\pi)^d}\frac{1}{k^2} - \lambda(p^2 z^{(1)} + b^{(1)}) = -\lambda(p^2 z^{(1)} + b^{(1)}). \tag{0.6}$$

[1]Например можно взять $e_1 = (\sqrt{3}, 0, 0, 0)$, $e_2 = (-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, 0, 0)$, $e_3 = (-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \sqrt{2}, 0)$, $e_4 = (-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, -\sqrt{2}, 0)$.

Из уравнений $\Sigma(0) = 0$ и $\Sigma'(\mu^2) = 0$ мы получаем

$$b^{(1)}(\mu) = 0, \quad z^{(1)}(\mu) = 0. \tag{0.7}$$

Во втором порядке по λ^2, для $\Gamma^{(2)}$ мы рассматриваем три диаграммы:

$-\Sigma(p^2) \quad =$  $+$  $+$ 

Первая диаграмма равна

$$\begin{aligned}
\Sigma_a(p^2) &= -\frac{\lambda^2(\mu)}{3!}\int\frac{d^dkd^dq}{(2\pi)^{2d}}\frac{1}{k^2q^2(p+k+q)^2} = -\frac{\lambda^2(\mu)}{3!}\int\frac{d^dkd^dq}{(2\pi)^{2d}}\int_0^\infty dt_1dt_2dt_3e^{-k^2t_1-q^2t_2-(p+k+q)^2t_3} = \\
&= -\frac{\lambda^2(\mu)}{3!}\int_0^\infty dt_1dt_2dt_3\int\frac{d^dkd^dq}{(2\pi)^{2d}}e^{-k^2(t_1+t_3)-2k(q+p)t_3-q^2(t_2+t_3)-2pqt_3-p^2t_3} = \\
&= -\frac{\lambda^2(\mu)}{3!}\int_0^\infty dt_1dt_2dt_3\int\frac{d^dq}{(2\pi)^{2d}}e^{-q^2(t_2+t_3)-2pqt_3-p^2t_3+\frac{(q+p)^2t_3^2}{t_1+t_3}}\int d^dke^{-(t_1+t_3)(k+\frac{(q+p)t_3}{t_1+t_3})^2} = \\
&= -\frac{\lambda^2(\mu)}{3!}\int_0^\infty dt_1dt_2dt_3\int\frac{d^dq}{(2\pi)^{2d}}e^{-\frac{q^2(t_1t_2+t_2t_3+t_1t_3)+2pqt_1t_3+p^2t_1t_3}{t_1+t_3}}\Big(\frac{\pi}{t_1+t_3}\Big)^{d/2} = \\
&= -\frac{\lambda^2(\mu)}{3!}\int_0^\infty dt_1dt_2dt_3\frac{1}{(2\pi)^{2d}}e^{-p^2\frac{t_1t_2t_3}{t_1t_2+t_2t_3+t_1t_3}}\Big(\frac{\pi(t_1+t_3)}{t_1t_2+t_2t_3+t_1t_3}\Big)^{d/2}\Big(\frac{\pi}{t_1+t_3}\Big)^{d/2}\stackrel{t_i\to t_i/p^2}{=} \\
&= -\frac{\lambda^2(\mu)(p^2)^{d-3}}{3!(4\pi)^d}\int_0^\infty\frac{dt_1dt_2dt_3}{(t_1t_2+t_2t_3+t_1t_3)^{d/2}}e^{-\frac{t_1t_2t_3}{t_1t_2+t_2t_3+t_1t_3}} = \\
&= -\frac{\lambda^2(\mu)(p^2)^{d-3}}{3!(4\pi)^d}\frac{\Gamma(3-d)\Gamma^3(d/2-1)}{\Gamma(3d/2-3)}.
\end{aligned} \tag{0.8}$$

Также для второй и третьей диаграммы мы получаем

$$\begin{aligned}
\Sigma_b(p^2) &= -\frac{\delta\lambda(\mu)}{2}\int\frac{d^dk}{(2\pi)^d}\frac{1}{k^2} = 0 \\
\Sigma_c(p^2) &= -(p^2\delta Z(\mu) + \delta m^2(\mu)) = -\lambda^2(\mu)(z^{(2)}(\mu)p^2 + b^{(2)}(\mu))
\end{aligned} \tag{0.9}$$

Из первого ренормализационного условия $\Gamma^{(2)}(0) = 0$ получаем ($\Gamma^{(2)} = p^2 + \Sigma(p^2)$):

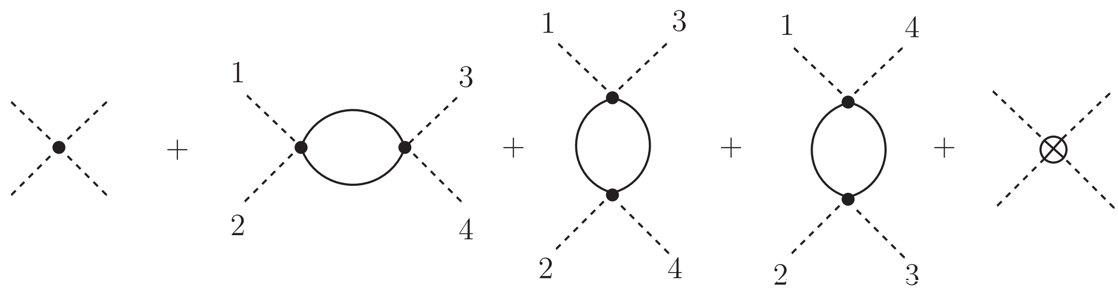
$$b^{(2)}(\mu) = 0. \tag{0.10}$$

Из второго ренормализационного условия $\frac{d\Gamma^{(2)}}{dp^2}\Big|_{p^2=\mu^2} = 1$ получаем:

$$z^{(2)}(\mu) = \frac{(\mu^2)^{d-4}\Gamma(4-d)\Gamma^3(d/2-1)}{3!(4\pi)^d\Gamma(3d/2-3)}, \tag{0.11}$$

откуда получим при $d = 4-\epsilon$ и $\epsilon \to 0$:

$$\Gamma^{(2)}(p^2) = p^2 + \Sigma_a(p^2) + \Sigma_b(p^2) + \Sigma_c(p^2) = p^2 + \frac{1}{12}\frac{\lambda^2}{(4\pi)^4}p^2\big(\log(\mu^2/p^2) + 1\big) + O(\lambda^3). \tag{0.12}$$

$-\Gamma^{(4)}(p_1,p_2,p_3,p_4) =$ 

Для $\Gamma^{(4)}(p_1,p_2,p_3,p_4)$ имеем получаем

$$\Gamma^{(4)}(p_1,p_2,p_3,p_4) = \lambda(\mu) - \frac{\lambda^2(\mu)}{2}(I(p_{12}^2) + I(p_{13}^2) + I(p_{14}^2)) + \lambda^2(\mu)a^{(2)}(\mu) + O(\lambda^3), \tag{0.13}$$

где $p_{12} = p_1 + p_2$, $p_{13} = p_1 + p_3$, $p_{14} = p_1 + p_4$ и

$$\begin{aligned} I(q^2) &= \int \frac{d^dk}{(2\pi)^d}\frac{1}{k^2(q+k)^2} = \int \frac{d^dk}{(2\pi)^d}\int_0^1 dx \frac{1}{(x(q+k)^2 + (1-x)k^2)^2} = \\ &= \int_0^1 dx \int \frac{d^dk}{(2\pi)^d}\frac{1}{(k^2 + 2xqk + xq^2)^2} = \int_0^1 dx \int \frac{d^dk}{(2\pi)^d}\frac{1}{((k+xq)^2 + x(1-x)q^2)^2} = \\ &= \frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}}\int_0^1 dx (x(1-x)q^2)^{\frac{d}{2}-2} = \frac{(q^2)^{\frac{d}{2}-2}}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}}\frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})\Gamma^2(\frac{d}{2}-1)}{\Gamma(d-2)}. \end{aligned} \tag{0.14}$$

Далее из условия $\Gamma^{(4)}|_{p_i=\mu e_i} = \lambda(\mu)$, где $e_1, e_2, .., e_4$ 4-вектора, такие, что $e_1 + e_2 + e_3 + e_4 = 0$ и $p_i^2 = 3\mu^2$, $p_i \cdot p_j = -\mu^2$, находим ($p_{12}^2 = p_{13}^2 = p_{14}^2 = 4\mu^2$):

$$a^{(2)}(\mu) = \frac{3}{2}I(4\mu^2). \tag{0.15}$$

Затем находим, что

$$I(q^2) - I(\mu^2) \overset{d\to 4}{=} -\frac{1}{(4\pi)^2}\log\frac{q^2}{4\mu^2}. \tag{0.16}$$

И таким образом мы получаем

$$\begin{aligned} \Gamma^{(2)}(p^2) &= p^2 + \frac{1}{12}\frac{\lambda^2}{(4\pi)^4}p^2\left(\log(\mu^2/p^2) + 1\right) + O(\lambda^3), \\ \Gamma^{(4)}(p^2) &= \lambda + \frac{1}{2}\frac{\lambda^2}{(4\pi)^2}\left(\log(p_{12}^2/4\mu^2) + \log(p_{13}^2/4\mu^2) + \log(p_{14}^2/4\mu^2)\right) + O(\lambda^3), \end{aligned} \tag{0.17}$$

где $p_{12}^2 = (p_1 + p_2)^2$ и т.д.

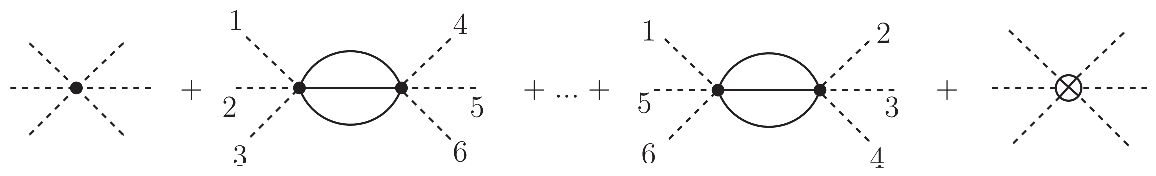
2. Бета-функция безмассовой теории ϕ^6

Рассмотрим безмассовую теорию ϕ^6 в $d = 3$ Евклидовом пространстве. Действие теории

$$S = \int d^3x \left(\frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 + \frac{\lambda}{6!}\phi^6 + \text{контрчлены}\right). \tag{0.18}$$

Вычислим ведущий член в бета-функции $\beta(\lambda)$. Для $\Gamma^{(6)}(p_1, ..., p_6)$ имеем

$-\Gamma^{(6)}(p_1, ..., p_6) =$



И мы получаем

$$\Gamma^{(6)}(p_1, ..., p_6) = \lambda - \frac{(-\lambda)^2}{6}(J(p_{123}^2) + ... + J(p_{156}^2)) + \lambda^2 a^{(2)} + O(\lambda^3), \tag{0.19}$$

где $p_{ijk} = p_i + p_j + p_k$ и в сумме имеется 10 слагаемых вида $J(p^2)$ и

$$J(p^2) = \int \frac{d^d q d^d k}{(2\pi)^{2d}} \frac{1}{k^2 q^2 (p+k+q)^2} = \frac{(p^2)^{d-3}}{(4\pi)^d} \frac{\Gamma(3-d)\Gamma^3(d/2-1)}{\Gamma(3d/2-3)}. \tag{0.20}$$

Теперь используя ренормальзационное условие

$$\Gamma^{(6)}(p_1, ..., p_6)|_{p_i = \mu e_i} = \lambda(\mu), \tag{0.21}$$

где $e_1, ..., e_6$ — какие-то произвольные 3-вектора с условием $\sum_{i=1}^6 e_i = 0$, мы найдем, что

$$a^{(2)}(\mu) = \frac{1}{6}(J(\mu^2 e_{123}^2) + ... + J(\mu^2 e_{156}^2)). \tag{0.22}$$

Далее замечая, что

$$J(p^2) - J(\mu^2) \overset{d \to 3}{=} -\frac{1}{2(4\pi)^2} \log \frac{p^2}{\mu^2}, \tag{0.23}$$

получим

$$\Gamma^{(6)}(p_1, ..., p_6) = \lambda + \frac{\lambda^2}{12(4\pi)^2}(\log \frac{p_{123}^2}{\mu^2 e_{123}^2} + ... + \log \frac{p_{156}^2}{\mu^2 e_{156}^2}) + O(\lambda^3). \tag{0.24}$$

Далее подставляя $\Gamma^{(6)}(p_1, ..., p_6)$ в уравнение Каллана-Симанчика:

$$\left(\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta(\lambda) \frac{\partial}{\partial \lambda} - 6\gamma(\lambda)\right) \Gamma^{(6)}(p_1, ..., p_6) = 0, \tag{0.25}$$

находим

$$-\frac{10\lambda^2}{12(4\pi)^2}(\mu \frac{\partial}{\partial \mu} \log \mu^2) + \beta(\lambda) - 6\gamma(\lambda)\lambda + O(\lambda^3) = 0, \tag{0.26}$$

затем, используем, что $\gamma(\lambda) = O(\lambda^2)$[2], а следовательно слагаемое $\gamma(\lambda)\lambda = O(\lambda^3)$ и может не рассматриваться во втором порядке по λ, поэтому мы в итоге получаем:

$$\beta(\lambda) = \frac{10\lambda^2}{12(4\pi)^2}(\mu \frac{\partial}{\partial \mu} \log \mu^2) = \frac{5\lambda^2}{48\pi^2}. \tag{0.27}$$

[2]Строго говоря, это нужно было бы проверить, но в данном случае мы оставим это как упражнение.

3. Задача 11.1 из Пескина-Шредера.
(a). Итак у нас есть свободное скалярное поле $\phi(x)$ с пропагатором

$$\langle T\phi(x)\phi(0)\rangle = D(x). \tag{0.28}$$

и конечно мы можем использовать теорему Вика. Можно использовать комбинаторные методы, но наипростейший путь использовать функциональный интеграл

$$\begin{aligned}\langle Te^{i\phi(x_0)}e^{-i\phi(0)}\rangle &= \int D\phi e^{i(\phi(x_0)-\phi(0))}e^{\int d^dxd^dy\frac{1}{2}\phi(x)D^{-1}(x-y)\phi(y)} = \\ &= \int D\phi e^{\int d^dxd^dy\frac{1}{2}\phi(x)D^{-1}(x-y)\phi(y)+i\int d^dx\phi(x)(\delta(x-x_0)-\delta(x))} = \\ &= e^{-\frac{1}{2}\int d^dxd^dy(\delta(x-x_0)-\delta(x))D(x-y)(\delta(y-x_0)-\delta(y))} = e^{-\frac{1}{2}\int d^dx(\delta(x-x_0)-\delta(x))(D(x-x_0)-D(x))} = \\ &= e^{-\frac{1}{2}((D(0)-D(x_0)-(D(-x_0)-D(0)))} = e^{D(x_0)-D(0)}.\end{aligned} \tag{0.29}$$

(b). У нас есть только производные ϕ, т.е. члены вида $\lambda^{k_1\ldots k_m}_{n_1\ldots n_m}(\nabla^{n_1}\phi)^{k_1}\ldots(\nabla^{n_m}\phi)^{k_m}$. И мы находим ($\phi$ есть фаза и поэтому $[\phi]=1$)

$$[\phi]=1,\quad [\rho]=L^{2-d},\quad [\lambda^{k_1\ldots k_m}_{n_1\ldots n_m}] = L^{\sum_i k_in_i-d}. \tag{0.30}$$

Принимая во внимание то, что $n_i, k_i \geqslant 1$ можно показать, что

$$P=\sum_{i=1}^{m}k_in_i-d\geqslant m-d. \tag{0.31}$$

Если $m=1$, мы получим линейный член, что есть просто источник и это не интересно. Для $m=2$ мы имеем $P=2-d$, только когда $k_1=k_2=n_1=n_2=1$ и в этом случае мы получим $\rho(\nabla\phi)^2$. В остальных случаях мы имеем $P>2-d$, поэтому эти члены ростут быстрее, чем член с ρ, и они будут релевантными.
(c). Мы имеем

$$\langle s(x)s^*(0)\rangle = \langle Ae^{i\phi(x)}Ae^{-i\phi(0)}\rangle = A^2e^{D(x)-D(0)} \tag{0.32}$$

и для Лагранжиана $L=\frac{1}{2}\rho(\nabla\phi)^2$ получим

$$\begin{aligned}D(x) &= \frac{1}{\rho}\int\frac{d^dk}{(2\pi)^d}\frac{i}{k^2}e^{ikx} = \frac{1}{\rho}\int\frac{d^dk_E}{(2\pi)^d}\frac{1}{k_E^2}e^{-ik_Ex} = \frac{1}{\rho}\int\frac{d^dk_E}{(2\pi)^d}\int_0^\infty dte^{-tk_E^2-ik_Ex} = \\ &= \frac{1}{\rho}\int_0^\infty dt\frac{t^{-d/2}}{(4\pi)^{d/2}}e^{-\frac{x^2}{4t}} \overset{t=1/s}{=} \frac{1}{(4\pi)^{d/2}\rho}\int_0^\infty dss^{d/2-2}e^{-s\frac{x^2}{4}} = \frac{\Gamma(d/2-1)}{4\rho\pi^{d/2}|x|^{d-2}}.\end{aligned} \tag{0.33}$$

Мы предполагаем, что $D(0)=\frac{\Gamma(d/2-1)}{4\rho\pi^{d/2}|a|^{d-2}}$, где a — размер решетки. Поэтому получаем

$$\langle s(x)s^*(0)\rangle = \langle Ae^{i\phi(x)}Ae^{-i\phi(0)}\rangle = A^2\exp\left(\frac{\Gamma(d/2-1)}{4\rho\pi^{d/2}}(\frac{1}{|x|^{d-2}}-\frac{1}{|a|^{d-2}})\right). \tag{0.34}$$

В итоге мы можем написать для $d>2$:

$$\langle s(x)s^*(0)\rangle = A^2e^{-\frac{\Gamma(d/2-1)}{4\rho\pi^{d/2}}\frac{1}{|a|^{d-2}}}\exp\left(\frac{\Gamma(d/2-1)}{4\rho\pi^{d/2}}\frac{1}{|x|^{d-2}}\right). \tag{0.35}$$

Для $d=2$ мы имеем $D(x)=-\frac{1}{2\pi\rho}\log|x|$, поэтому:

$$\langle s(x)s^*(0)\rangle = \frac{A^2|a|^{2\pi\rho}}{|x|^{2\pi\rho}}. \tag{0.36}$$