Листок 1. Классическая теория поля

(Сканы/фото решений данного листка принимаются до: **22.09.13**
на e-mail: grigory@princeton.edu)

◯ 1. Классическая Теория Поля и Теорема Нётер (100 баллов)

В этой задаче, мы будем изучать классическую Теорему Нётер, которая утверждает, что любой непрерывной симметрии действия соответствует сохраняющийся ток.

(a). (15 баллов) В качестве разминки, рассмотрим двухмерный изотропный гармонический осциллятор с координатами x, y. В терминах комплексной координаты $\phi = x + iy$ действие имеет вид:

$$S[\phi(t)] = \int dt \left(\frac{1}{2}\dot{\phi}^*(t)\dot{\phi}(t) - \frac{1}{2}m^2\phi^*(t)\phi(t) \right). \tag{0.1}$$

Покажите, что это действие инвариантно при преобразовании $\phi(t) \to \phi'(t) = e^{i\alpha}\phi(t)$, где α действительная постоянная. Как это преобразование действует на координаты x и y? Теперь рассмотрим такое же преобразование, только с зависимой от времени функцией $\alpha(t)$,

$$\phi(t) \to \phi'(t) = e^{i\alpha(t)}\phi(t). \tag{0.2}$$

Это больше не симметрия действия. Для инфинитезимального (бесконечно маленького) $\alpha(t)$ покажите, что изменение действия есть

$$\delta S = S[\phi'(t)] - S[\phi(t)] = \int dt Q(t)\dot{\alpha}(t) + \mathcal{O}(\alpha^2), \tag{0.3}$$

и найдите $Q(t)$ в терминах $\phi(t)$. Используйте (0.3) для вывода того, что из уравнений движения следует, что $\dot{Q}(t) = 0$, т.е. Q является сохраняющимся зарядом. Какой физической величине соответствует заряд Q в данном примере?

(b). (15 баллов) Рассмотрим классическую теорию поля с действием

$$S = \int d^4x \mathcal{L}(\phi_i(x), \partial_\mu\phi_i(x)). \tag{0.4}$$

Предположим, что S инвариантно относительно инфинитезимальных преобразований вида

$$\phi_i(x) \to \phi_i'(x) = \phi_i(x) + \alpha F_i(\phi_j(x), \partial_\mu\phi_j(x)), \quad \alpha \ll 1. \tag{0.5}$$

Если S инвариантно, то как $\mathcal{L}$ изменятся при таких преобразованиях. Теперь объявляя α функцией координаты x и действуя аналогично части **(a)** выше, покажите, что существует ток j^μ, такой что при учете уравнений движения можно получить $\partial_\mu j^\mu = 0$, то есть ток сохраняется (сохраняющийся ток). Найдите явную формулу для j^μ.

(c). (25 баллов) Рассмотрим комплексное скалярное поле $\phi(x)$ с действием

$$S = \int d^4x(\partial^\mu\phi^*\partial_\mu\phi - V(|\phi|)). \tag{0.6}$$

Покажите, что действие инвариантно относительно глобальных $U(1)$ фазовых поворотов $\phi'(x) = e^{i\alpha}\phi(x)$, и найдите соответствующий Нётеровский ток. Повторите тоже самое, но для сдвигов (трансляций):

$$x^\mu \to x'^\mu = x^\mu + a^\mu, \quad \phi(x) \to \phi'(x') = \phi(x). \tag{0.7}$$

Получите соответствующие Нётеровские токи и следовательно Тензор энергии-импульса $T_{\mu\nu}$. (Обратите внимание, что Лагранжева плотность не является инвариантной при сдвигах, в том смысле, что: $\delta\mathcal{L}(x) = \mathcal{L}(\phi'(x), \partial_\mu\phi'(x)) - \mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu\phi(x)) = a^\mu\partial_\mu\mathcal{L}(x)$. В данном месте может возникнуть путаница, так как иногда говорят, что Лагранжева плотность как раз инвариантна, подразумевая, что: $\mathcal{L}(\phi'(x'), \partial'_\mu\phi'(x')) - \mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu\phi(x)) = 0$). Теперь рассмотрите масштабное преобразование

$$x'^\mu = \lambda x^\mu, \quad \phi'(x') = \lambda^{-1}\phi(x). \tag{0.8}$$

При каком виде потенциала $V(|\phi|)$ данное преобразование является симметрией действия? Найдите соответствующий Нётеровский ток и выразите его в терминах $T_{\mu\nu}$.

(d). (15 баллов) Утверждение, что теория является Лоренц инвариантной, является утверждением о наличии симметрии нашей теории (Лоренц-симметрии), а следовательно мы можем в полном праве воспользоваться теоремой Нётер и найти соответствующие данной симметрии сохраняющиеся токи. Рассмотрим инфинитезимальное преобразование Лоренца для теории одного скалярного поля

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu = x^\mu + \omega^\mu{}_\nu x^\nu, \quad \phi(x) \to \phi'(x') = \phi(x), \quad \omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}. \tag{0.9}$$

Покажите, что такому преобразованию соответствуют сохраняющиеся токи вида

$$M^{\lambda\mu\nu} = x^\mu T^{\lambda\nu} - x^\nu T^{\lambda\mu}. \tag{0.10}$$

Соответственно независящий от времени тензор получается по формуле $L^{\mu\nu} = \int d^3x M^{0\mu\nu}$. А величина $L_k = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}L^{ij}$ в физике называется моментом импульса.

(e). (15 баллов) Найдите сохраняющиеся токи соответствующие Лоренц симметрии для теории векторного поля A_μ с Лагранжианом $\mathcal{L}(A_\mu(x), \partial_\nu A_\mu(x))$. В данном случае

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu, \quad A_\mu(x) \to A'_\mu(x') = \Lambda_\mu{}^\nu A_\nu(x). \tag{0.11}$$

Аналогично задаче **(d)** рассмотрите инфинитезимальное преобразование Лоренца и покажите, что у сохраняющихся токов $M^{\lambda\mu\nu}$ в данном случае появляется еще и спиновая часть

$$M^{\lambda\mu\nu} = x^\mu T^{\lambda\nu} - x^\nu T^{\lambda\mu} + S^{\lambda\mu\nu}. \tag{0.12}$$

Найдите $S^{\lambda\mu\nu}$.

(f). (15 баллов) Покажите, что в Лоренц инвариантной теории одного скалярного поля $\phi(x^\mu)$ с Лагранжевой плотностью $\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu\phi)$ Тензор энергии-импульса $T_{\mu\nu}$, полученный как Нётеровский ток, всегда симметричен. (В данном случае как раз удобно рассмотреть разность: $0 = \mathcal{L}(\phi'(x'), \partial'_\mu\phi'(x')) - \mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu\phi(x))$).