Листок 11. Перенормировки в теории ϕ^3

Решение

○ **1. (100 баллов)**

В этой задаче мы будем изучать перенормировки в теории ϕ^3 в 6 мерном Евклидовом пространстве. Статистическая сумма нашей теории записывается как

$$Z = \int D\phi_0 \exp\Big(- \int d^6x \big(\frac{1}{2}(\partial_\mu \phi_0)^2 + \frac{1}{2} m_0^2 \phi_0^2 + \frac{\lambda_0}{3!}\phi_0^3\big)\Big), \tag{0.1}$$

где m_0 называется “затравочной"(“голой”) массой и λ_0 затравочная константа связи.

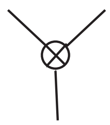
Применяя размерную регуляризацию, то есть работая в $d = 6 - \epsilon$ размерности, мы вычислим одно-петлевые контрчлены δZ, δm^2 и $\delta\lambda$, где $\delta Z = Z - 1$, $\delta m^2 = Z m_0^2 - m^2$ и $\delta\lambda = \lambda_0 Z^{3/2} - \lambda$, используя следующие ренормализационные условия:

$$\begin{aligned} &\Gamma^{(3)}(0,0,0) = \lambda, \\ &\Gamma^{(2)}(p) = p^2 + m^2 + O(p^4) \end{aligned} \tag{0.2}$$

Итак мы имеем следующее действие с контр-членами

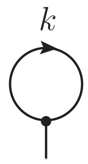
$$S = \int d^6x \left(\frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2 + \frac{\lambda}{3!}\phi^3 + \frac{1}{2}\delta Z(\partial_\mu\phi)^2 + \frac{1}{2}\delta m^2\phi^2 + \frac{\delta\lambda}{3!}\phi^3 + \delta Y \phi \right), \tag{0.3}$$

где $\phi_0 = Z^{1/2}\phi$. Здесь произошел небольшой обман, а именно мы руками ввели контр-член δY, который нужен для того, чтобы сделать одноточку $\langle\phi\rangle = 0$ во всех порядках по λ и как следствие сократить все диаграммы содержащие “головастиков”. Мы поясним ниже, что это значит [1]. Итак у нас есть три контр-члена:

 $= -\delta\lambda$ 

$= -(p^2\delta Z + \delta m^2)$  $= -\delta Y$

Тогда для одноточечной функции $\langle\phi\rangle$ в первом порядке по λ мы получим

$\Gamma^{(1)}(p) =$ 

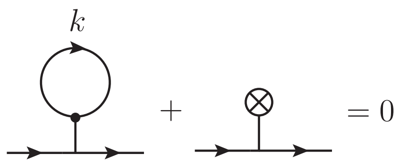
$+$  $+ \ldots$

И на языке формул:

$$\Gamma^{(1)}(p) = -\lambda \int \frac{d^dk}{(2\pi)^d}\frac{1}{k^2+m^2} - \delta Y = -\lambda \frac{(m^2)^{\frac{d}{2}-1}}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}}\Gamma(1-\frac{d}{2}) - \delta Y = 0. \tag{0.4}$$

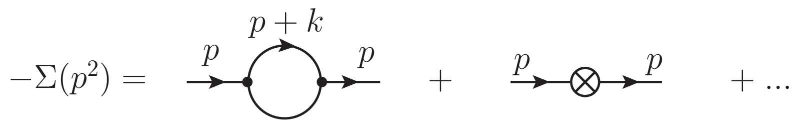
[1] Вообще говоря теория ϕ^3 является плохо определенной теорией, так как можно легко увидеть, что Гамильтониан данной теории неограничен снизу (в отличие от теории ϕ^4). Тем не менее теория возмущений не “видит” данной ужасной проблемы, и мы можем безнаказанно вычислять порядок за порядком контр-члены и перенормировки наших велечин.

Тогда в первом порядке мы для контр-члена получим: $\delta Y = -\lambda\frac{(m^2)^{\frac{d}{2}-1}}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}}\Gamma(1-\frac{d}{2}) + O(\lambda^2)$. Для более высоких порядков по λ мы опять выбираем контр-член δY так, чтобы в итоге получить $\langle\phi\rangle = 0$. Данный выбор контр-члена δY приводит к тому, что мы можем выкинуть все диаграммы "головастики"("tadpoles") из рассмотрения, так как их всегда можно будет сократить диаграммами с контр-членами δY. Например:



Более строгое утверждение можно сформулировать так: *мы ингорируем любую диаграмму, которую можно разрезать на две части, разрезав только одну линию. Причем одна из этих частей не будет содержать внешнии линии.*

Теперь для собственной энергетической части мы имеем:



То есть на языке формул мы получаем

$$
\begin{aligned}
-\Sigma(p^2) &= \frac{(-\lambda)^2}{2}\int\frac{d^dk}{(2\pi)^d}\frac{1}{(p+k)^2+m^2}\frac{1}{k^2+m^2} - (p^2\delta Z + \delta m^2) = \\
&= \frac{\lambda^2}{2}\int_0^1 dx\int\frac{d^dk}{(2\pi)^d}\frac{1}{[(k+xp)^2+(m^2+x(1-x)p^2)]^2} - (p^2\delta Z + \delta m^2) = \\
&= \frac{\lambda^2\Gamma(2-d/2)}{2(4\pi)^{d/2}}\int_0^1 dx\frac{1}{[m^2+x(1-x)p^2]^{2-d/2}} - (p^2\delta Z + \delta m^2), \qquad (0.5)
\end{aligned}
$$

где мы использовали формулу

$$
\int\frac{d^dk}{(2\pi)^d}\frac{1}{(k^2+\Delta)^n} = \frac{\Gamma(n-\frac{d}{2})}{(4\pi)^{d/2}\Gamma(n)}\frac{1}{\Delta^{n-\frac{d}{2}}}. \qquad (0.6)
$$

Далее из условий

$$
\Sigma(p^2)|_{p^2=0} = 0, \quad \frac{d}{dp^2}\Sigma(p^2)|_{p^2=0} = 0, \qquad (0.7)
$$

мы находим

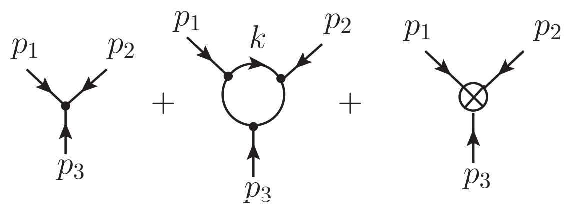
$$
\begin{aligned}
&\delta Z - \frac{\lambda^2\Gamma(2-d/2)}{2(4\pi)^{d/2}}\int_0^1 dx\frac{(d/2-2)x(1-x)}{(m^2)^{3-d/2}} = 0, \\
&\delta m^2 - \frac{\lambda^2\Gamma(2-d/2)}{2(4\pi)^{d/2}}\int_0^1 dx\frac{1}{(m^2)^{2-d/2}} = 0, \qquad (0.8)
\end{aligned}
$$

и в итоге получаем

$$\delta Z = -\frac{\lambda^2\Gamma(2-\frac{d}{2})(2-\frac{d}{2})}{12(4\pi)^{d/2}}\frac{1}{(m^2)^{3-d/2}} = -\frac{\lambda^2\Gamma(3-\frac{d}{2})}{12(4\pi)^{d/2}}\frac{1}{(m^2)^{3-d/2}} \overset{d=6-\epsilon}{=} \frac{\lambda^2}{6(4\pi)^3}\left(\frac{-1}{\epsilon}+\frac{1}{2}\log\frac{m^2}{4\pi}+\frac{\gamma}{2}+O(\epsilon)\right),$$
$$\delta m^2 = \frac{\lambda^2\Gamma(2-d/2)}{2(4\pi)^{d/2}}\frac{1}{(m^2)^{2-d/2}} \overset{d=6-\epsilon}{=} \frac{\lambda^2 m^2}{(4\pi)^3}\left(\frac{-1}{\epsilon}+\frac{1}{2}\log\frac{m^2}{4\pi}+\frac{\gamma}{2}-\frac{1}{2}+O(\epsilon)\right). \quad (0.9)$$

Для трехточечной функции $\Gamma^{(3)}(p_1,p_2,p_3)$ мы получим

$$-\Gamma^{(3)}(p_1,p_2,p_3) =$$



И на языке формул имеем:

$$-\Gamma^{(3)}(p_1,p_2,p_3) = -\lambda + (-\lambda)^3\int\frac{d^dk}{(2\pi)^d}\frac{1}{(k^2+m^2)((k+p_2)^2+m^2)((k+p_2+p_3)^2+m^2)} - \delta\lambda. \quad (0.10)$$

И из условия $\Gamma^{(3)}(0,0,0)=\lambda$, получаем

$$-\lambda^3\int\frac{d^dk}{(2\pi)^d}\frac{1}{(k^2+m^2)^3} - \delta\lambda = 0, \quad (0.11)$$

откуда

$$\delta\lambda = -\frac{\lambda^3\Gamma(3-d/2)}{2(4\pi)^{d/2}m^{6-d}} \overset{d=6-\epsilon}{=} = -\frac{\lambda^3\Gamma(\epsilon/2)}{2(4\pi)^{3-\epsilon/2}m^{\epsilon}} = \frac{\lambda^3}{(4\pi)^3}\left(\frac{-1}{\epsilon}+\frac{1}{2}\log\frac{m^2}{4\pi}+\frac{\gamma}{2}+O(\epsilon)\right). \quad (0.12)$$