Листок 12. Перенормировка пропагатора в теории ϕ^4

(Сканы/фото решений данного листка принимаются до: **15.12.13**
на e-mail: grigory@princeton.edu)

○ **1. (100 баллов)**

В этой задаче мы будем изучать перенормировку пропагатора в теории ϕ^4 в 4 мерном Евклидовом пространстве используя метод размерной регуляризации. Статистическая сумма нашей теории записывается как

$$Z = \int D\phi_0 \exp\Big(- \int d^4x (\frac{1}{2}(\partial_\mu \phi_0)^2 + \frac{1}{2} m_0^2 \phi_0^2 + \frac{\lambda_0}{4!}\phi_0^4)\Big), \tag{0.1}$$

где m_0 называется "затравочной"("голой") массой и λ_0 затравочная константа связи. Мы вводим новое поле ϕ и константы связи λ и m^2 по формулам

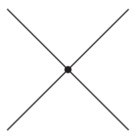
$$\begin{aligned} &\phi_0 = Z^{1/2}\phi, \\ &m_0^2 = Z^{-1}(m^2 + \delta m^2), \\ &\lambda_0 = Z^{-2}(\lambda + \delta\lambda), \end{aligned} \tag{0.2}$$

где $\delta Z = Z - 1$, $\delta m^2 = Z m_0^2 - m^2$ и $\delta\lambda = Z^2 \lambda_0 - \lambda$ контрчлены. И статистическая сумма запишется как

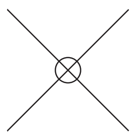
$$Z = \int D\phi \exp\Big(- \int d^4x (\frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + \frac{\lambda}{4!}\phi^4 + \frac{\delta Z}{2}(\partial_\mu\phi)^2 + \frac{1}{2}\delta m^2 \phi^2 + \frac{\delta\lambda}{4!}\phi^4)\Big). \tag{0.3}$$

Нашу диаграммную технику в данном случае можно кратко записать как:

 $= \frac{1}{k^2+m^2}$

 $= -\lambda$

 $= -(k^2 \delta Z + \delta m^2)$

 $= -\delta\lambda$

Контрчлены расскладываются по степеням взаимодействия λ:

$$\begin{aligned} &\delta Z = z^{(1)}\lambda + z^{(2)}\lambda^2 + ... \\ &\delta m^2 = b^{(1)}\lambda + b^{(2)}\lambda^2 + ... \\ &\delta\lambda = a^{(1)}\lambda + a^{(2)}\lambda^2 + ... \end{aligned} \tag{0.4}$$

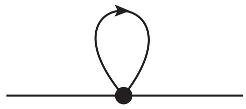
с коэффициентами зависящими от $\epsilon = 4 - d$, таким образом, что корреляционные функции ренормированных полей ϕ имеют конечный предел при $\epsilon \to 0$ в каждом порядке по λ.

В этой задаче нужно будет найти перенормировку пропагатора, то есть двухточечной функции $\Gamma^{(2)}(p^2)$ до второй петли:

$$\Gamma^{(2)}(p^2) = p^2 + m^2 + \Sigma(p^2), \tag{0.5}$$

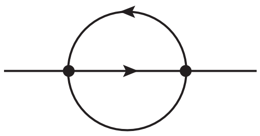
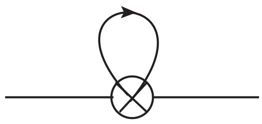
с ренормализационными условиями $\Sigma(p^2 = 0) = 0$ и $\frac{d}{dp^2}\Sigma(p^2)|_{p^2=0} = 0$ (кратко: $\Sigma(0) = \Sigma'(0) = 0$).

(a). Однопетлевое вычисление $\Gamma^{(2)}(p^2)$ **(30 баллов)** В первой петле для $\Sigma(p^2)$ мы имеем:

$-\Sigma(p^2) \quad =$  $+$ 

Найдите коэффициенты $z^{(1)}$ и $b^{(1)}$ для контчленов δZ и δm^2, исходя из ренормализационных условий $\Sigma(0) = \Sigma'(0) = 0$.

(b). Двухпетлевое вычисление $\Gamma^{(2)}(p^2)$ **(70 баллов)** Во второй петле для $\Sigma(p^2)$ мы имеем:

$-\Sigma(p^2) \quad =$  $+$  $+$ 

Вычислите первую диаграмму (I). Она дается довольно громоздким двойным интегралом. Вычислите сначала первый, а затем второй интегралы используя Фейнмановские параметры, а именно пользуясь формулой:

$$\frac{1}{A^\alpha B^\beta} = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^1 \frac{dv v^{\alpha-1}(1-v)^{\beta-1}}{[vA + (1-v)B]^{\alpha+\beta}}. \tag{0.6}$$

В итоге вы должны получить результат вида

$$\Sigma_I(p^2) = -\frac{\lambda^2}{3!}\frac{\Gamma(3-d)}{(4\pi)^d}\times$$
$$\int_0^1 dw du w^{1-\frac{d}{2}}((1-w)+wu(1-u))^{3-\frac{3d}{2}}\left[u(1-u)w(1-w)p^2 + ((1-w)+wu(1-u))m^2\right]^{d-3}. \tag{0.7}$$

Данный интеграл расходится как $1/\epsilon^2$. Вычитая из него члены вида $\Sigma_I(0)$ и $p^2\Sigma_I'(0)$, получите выражение для

$$\Sigma_r(p^2) = \Sigma_I(p^2) - \Sigma_I(0) - p^2\Sigma_I'(0). \tag{0.8}$$

Покажите, что $\Sigma_r(p^2)$ при $d \to 4$ не имеет расходимостей. С другой стороны мы имеем

$$\begin{aligned}\Sigma(p^2) &= \Sigma_I(p^2) + \Sigma_{II}(p^2) + \Sigma_{III}(p^2) \\ &= \Sigma_r(p^2) + \Sigma_I(0) + p^2\Sigma_I'(0) + \Sigma_{II}(p^2) + \Sigma_{III}(p^2).\end{aligned} \tag{0.9}$$

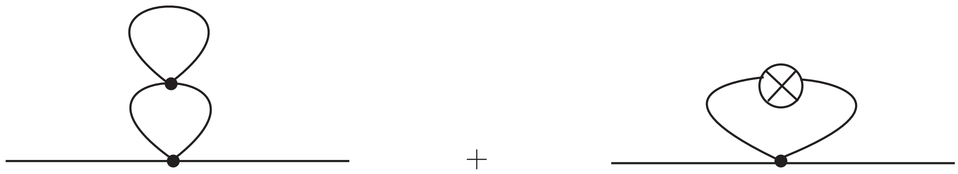
Найдити коэффициенты в контлченах: $z^{(2)}, a^{(2)}$ и $b^{(2)}$ исходя из условия

$$\Sigma_I(0) + p^2\Sigma_I'(0) + \Sigma_{II}(p^2) + \Sigma_{III}(p^2) = 0. \tag{0.10}$$

Откуда в конечно итоге мы получим, что

$$\Sigma(p^2) = \Sigma_r(p^2). \tag{0.11}$$

Мы не включили сюда диаграммы вида:



Покажите, что их сумма равна нулю, если использовать коэффициенты $z^{(1)}$ и $b^{(1)}$ которые мы нашли в пункте (a).