Листок 12. Перенормировка пропагатора в теории ϕ^4

Решение

◯ 1. (100 баллов)

В этой задаче мы будем изучать перенормировку пропагатора в теории ϕ^4 в 4 мерном Евклидовом пространстве используя метод размерной регуляризации. Статистическая сумма нашей теории записывается как

$$Z = \int D\phi_0 \exp\big(- \int d^4x (\frac{1}{2}(\partial_\mu \phi_0)^2 + \frac{1}{2} m_0^2 \phi_0^2 + \frac{\lambda_0}{4!}\phi_0^4)\big), \tag{0.1}$$

где m_0 называется “затравочной"(“голой”) массой и λ_0 затравочная константа связи. Мы вводим новое поле ϕ и константы связи λ и m^2 по формулам

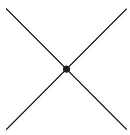
$$\begin{aligned} \phi_0 &= Z^{1/2}\phi, \\ m_0^2 &= Z^{-1}(m^2 + \delta m^2), \\ \lambda_0 &= Z^{-2}(\lambda + \delta\lambda), \end{aligned} \tag{0.2}$$

где $\delta Z = Z - 1$, $\delta m^2 = Z m_0^2 - m^2$ и $\delta\lambda = Z^2\lambda_0 - \lambda$ контрчлены. И статистическая сумма запишется как

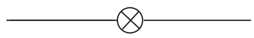
$$Z = \int D\phi \exp\big(- \int d^4x (\frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + \frac{\lambda}{4!}\phi^4 + \frac{\delta Z}{2}(\partial_\mu\phi)^2 + \frac{1}{2}\delta m^2 \phi^2 + \frac{\delta\lambda}{4!}\phi^4)\big). \tag{0.3}$$

Нашу диаграммную технику в данном случае можно кратко записать как:

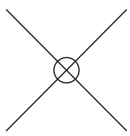
$= \frac{1}{k^2+m^2}$



$= -\lambda$



$= -(k^2\delta Z + \delta m^2)$



$= -\delta\lambda$

Контрчлены расскладываются по степеням взаимодействия λ:

$$\begin{aligned} \delta Z &= z^{(1)}\lambda + z^{(2)}\lambda^2 + ... \\ \delta m^2 &= b^{(1)}\lambda + b^{(2)}\lambda^2 + ... \\ \delta\lambda &= a^{(1)}\lambda + a^{(2)}\lambda^2 + ... \end{aligned} \tag{0.4}$$

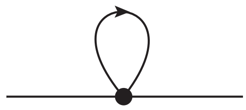
с коэффициентами зависящими от $\epsilon = 4 - d$, таким образом, что корреляционные функции ренормированных полей ϕ имеют конечный предел при $\epsilon \to 0$ в каждом порядке по λ.

В этой задаче мы найдем перенормировку пропагатора, то есть двухточечной функции $\Gamma^{(2)}(p^2)$ до второй петли:

$$\Gamma^{(2)}(p^2) = p^2 + m^2 + \Sigma(p^2), \tag{0.5}$$

с ренормализационными условиями $\Sigma(p^2)|_{p^2=0} = 0$ и $\frac{d}{dp^2}\Sigma(p^2)|_{p^2=0} = 0$ (кратко: $\Sigma(0) = \Sigma'(0) = 0$).

(a). Однопетлевое вычисление $\Gamma^{(2)}(p^2)$ (30 баллов) В первой петле для $\Sigma(p^2)$ мы имеем:

$-\Sigma(p^2) \quad =$  $\quad + \quad$ 

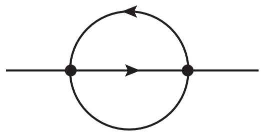
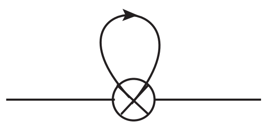
Найдем коэффициенты $z^{(1)}$ и $b^{(1)}$ для контчленов δZ и δm^2, исходя из ренормализационных условий $\Sigma(0) = \Sigma'(0) = 0$. Получаем

$$-\Sigma(p^2) = -\frac{\lambda}{2}\int \frac{d^dk}{(2\pi)^d}\frac{1}{k^2+m^2} - \lambda(p^2 z^{(1)} + b^{(1)}) = -\frac{\lambda}{2(4\pi)^{\frac{d}{2}}}\frac{\Gamma(1-\frac{d}{2})}{(m^2)^{1-\frac{d}{2}}} - \lambda(p^2 z^{(1)} + b^{(1)}). \qquad (0.6)$$

Из уравнений $\Sigma(0) = \Sigma'(0) = 0$ мы получаем

$$b^{(1)} = -\frac{1}{2(4\pi)^{\frac{d}{2}}}\frac{\Gamma(1-\frac{d}{2})}{(m^2)^{1-\frac{d}{2}}} \overset{d=4-\epsilon}{=} \frac{1}{(4\pi)^2}\frac{m^2}{\epsilon} - \frac{m^2}{2(4\pi)^2}(\log\frac{m^2}{4\pi} + \gamma - 1) + O(\epsilon), \quad z^{(1)} = 0. \qquad (0.7)$$

(b). Двухпетлевое вычисление $\Gamma^{(2)}(p^2)$ (70 баллов) Во второй петле для $\Sigma(p^2)$ мы имеем:

$-\Sigma(p^2) \quad =$  $\quad + \quad$  $\quad + \quad$ 

Вычислим первую диаграмму (I). Имеем

$$\begin{aligned}
-\Sigma_I(p^2) &= \frac{(-\lambda)^2}{3!}\int \frac{d^dkd^dq}{(2\pi)^{2d}}\frac{1}{k^2+m^2}\frac{1}{q^2+m^2}\frac{1}{(p+q+k)^2+m^2} = \\
&= \frac{\lambda^2}{3!}\int \frac{d^dkd^dq}{(2\pi)^{2d}}\frac{1}{k^2+m^2}\int_0^1 du\frac{1}{[u(q^2+2q(p+k)+(p+k)^2)+(1-u)q^2+m^2]^2} = \\
&= \frac{\lambda^2}{3!}\int \frac{d^dk}{(2\pi)^d}\frac{1}{k^2+m^2}\int_0^1 du\int \frac{d^dq}{(2\pi)^d}\frac{1}{[(q+u(p+k))^2+m^2+u(1-u)(p+k)^2]^2} = \\
&= \frac{\lambda^2}{3!}\int \frac{d^dk}{(2\pi)^d}\frac{1}{k^2+m^2}\int_0^1 du\frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{(4\pi)^{d/2}\Gamma(2)}\frac{1}{[m^2+u(1-u)(p+k)^2]^{2-\frac{d}{2}}} = \\
&= \frac{\lambda^2}{3!}\frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{(4\pi)^{d/2}\Gamma(2)}\int \frac{d^dk}{(2\pi)^d}\int_0^1 dudw w^{1-\frac{d}{2}}\frac{\Gamma(3-\frac{d}{2})}{\Gamma(2-\frac{d}{2})\Gamma(2)[m^2+wu(1-u)(p+k)^2+k^2(1-w)]^{3-\frac{d}{2}}} = \\
&= \frac{\lambda^2}{3!}\frac{\Gamma(3-\frac{d}{2})}{(4\pi)^{d/2}}\int dudw w^{1-\frac{d}{2}}\int \frac{d^dk}{(2\pi)^d}\frac{1}{[k^2A+2pkwu(1-u)+m^2+p^2wu(1-u)]^{3-\frac{d}{2}}}, \qquad (0.8)
\end{aligned}$$

где $A = 1 - w + wu(1-u)$. Далее получаем

$$\begin{aligned}
-\Sigma_I(p^2) &= \frac{\lambda^2}{3!}\frac{\Gamma(3-\frac{d}{2})}{(4\pi)^{d/2}}\int \frac{dudw w^{1-\frac{d}{2}}}{A^{3-\frac{d}{2}}}\int \frac{d^dk}{(2\pi)^d}\frac{1}{[(k+p\frac{wu(1-u)}{A})^2+\frac{m^2+p^2wu(1-u)}{A}-p^2\frac{w^2u^2(1-u)^2}{A^2}]^{3-\frac{d}{2}}} = \\
&= \frac{\lambda^2}{3!}\frac{\Gamma(3-\frac{d}{2})}{(4\pi)^{d/2}}\int \frac{dudw w^{1-\frac{d}{2}}}{A^{3-\frac{d}{2}}}\frac{\Gamma(3-d)}{(4\pi)^{d/2}\Gamma(3-\frac{d}{2})}\Big(\frac{A^2}{u(1-u)w(1-w)p^2+Am^2}\Big)^{3-d}. \qquad (0.9)
\end{aligned}$$

В итоге мы получим

$$\Sigma_I(p^2) = -\frac{\lambda^2}{3!}\frac{\Gamma(3-d)}{(4\pi)^d}\int dudww^{1-\frac{d}{2}}A^{3-\frac{3d}{2}}\big(u(1-u)w(1-w)p^2 + Am^2\big)^{d-3} =$$
$$= -\frac{\lambda^2}{3!}\frac{\Gamma(3-d)}{(4\pi)^d}(m^2)^{d-3}\int dudww^{1-\frac{d}{2}}A^{-\frac{d}{2}}\big(1+Bp^2\big)^{d-3}, \tag{0.10}$$

где $B = \frac{u(1-u)w(1-w)}{Am^2}$. Данный интеграл расходится как $1/\epsilon^2$. Вычитая из него члены вида $\Sigma_I(0)$ и $p^2\Sigma_I'(0)$, получим

$$\Sigma_r(p^2) = \Sigma_I(p^2) - \Sigma_I(0) - p^2\Sigma_I'(0) =$$
$$= -\frac{\lambda^2}{3!}\frac{\Gamma(3-d)}{(4\pi)^d}(m^2)^{d-3}\int dudww^{1-\frac{d}{2}}A^{-\frac{d}{2}}((1+Bp^2)^{d-3} - 1 - (d-3)p^2B) =$$
$$= -\frac{\lambda^2}{3!}\frac{\Gamma(-1+\epsilon)}{(4\pi)^{4-\epsilon}}(m^2)^{1-\epsilon}\int dudww^{1-\frac{d}{2}}A^{-\frac{d}{2}}((1+Bp^2)e^{-\epsilon\log(1+Bp^2)} - 1 - (1-\epsilon)p^2B) =$$
$$= -\frac{\lambda^2}{3!}\frac{\epsilon\Gamma(-1+\epsilon)}{(4\pi)^{4-\epsilon}}(m^2)^{1-\epsilon}\int dudww^{1-\frac{d}{2}}A^{-\frac{d}{2}}\big(p^2B - (1+p^2B)\log(1+p^2B) + O(\epsilon)\big) \overset{\epsilon\to 0}{=}$$
$$= \frac{\lambda^2}{3!}\frac{m^2}{(4\pi)^4}\int_0^1 \frac{dudw}{wA^2}(p^2B - (1+p^2B)\log(1+p^2B)). \tag{0.11}$$

Покажем, что $\Sigma_r(p^2)$ при $d\to 4$ не имеет расходимостей. Имеем при $w\to 0$

$$A \to 1, \quad B \to \frac{wu(1-u)}{m^2} \to 0, \tag{0.12}$$

поэтому мы получаем для подынтегрального выражения при $w\to 0$:

$$\frac{1}{wA^2}(p^2B - (1+p^2B)\log(1+p^2B)) \to -\frac{(p^2B)^2}{2wA^2} \to -\frac{p^4}{2m^4}wu^2(1-u)^2 \to 0. \tag{0.13}$$

Откуда следует, что двойной инеграл по w и по u не имеет расходимостей при $w\to 0$. Теперь при $w\to 1$ мы имеем:

$$A \to 1 - w + u(1-u) = \alpha+\beta, \quad B \to \frac{(1-w)u(1-u)}{m^2(1-w+u(1-u))} = \frac{1}{m^2}\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}, \tag{0.14}$$

где $\alpha = 1-w \to +0$ и $\beta = u(1-u) > 0$. Для A и B имеем следующие неравенства:

$$A \geqslant \max(\alpha,\beta), \quad B \leqslant \frac{1}{m^2}\min(\alpha,\beta) \to 0. \tag{0.15}$$

И для подынтегрального выражения получаем при $w\to 1$:

$$\left|\frac{1}{wA^2}(p^2B - (1+p^2B)\log(1+p^2B))\right| \to \frac{(p^2B)^2}{2wA^2} \to \frac{p^4}{2}\frac{B^2}{A^2} \leqslant \frac{p^4}{2m^4}\frac{\min(\alpha,\beta)^2}{\max(\alpha,\beta)^2} \leqslant \frac{p^4}{2m^4}, \tag{0.16}$$

то есть мы опять видим, что подынтегральное выражение конечно и не содержит сингулярностей, таким образом мы видим, что $\Sigma_r(p^2)$ не имеет расходимостей.

С другой стороны мы имеем

$$\Sigma(p^2) = \Sigma_I(p^2) + \Sigma_{II}(p^2) + \Sigma_{III}(p^2)$$
$$= \Sigma_r(p^2) + \big(\Sigma_I(0) + p^2\Sigma_I'(0) + \Sigma_{II}(p^2) + \Sigma_{III}(p^2)\big). \tag{0.17}$$

Найдем коэффициенты в контлченах: $z^{(2)}, a^{(2)}$ и $b^{(2)}$ исходя из условия

$$\Sigma_I(0) + p^2\Sigma_I'(0) + \Sigma_{II}(p^2) + \Sigma_{III}(p^2) = 0. \tag{0.18}$$

Итак имеем:

$$\Sigma_{II}(p^2) = -\frac{\lambda^2 a^{(2)}}{2}\int\frac{d^dk}{(2\pi)^d}\frac{1}{k^2+m^2}, \quad \Sigma_{III}(p^2) = -\lambda^2(z^{(2)}p^2 + b^{(2)}), \tag{0.19}$$

откуда находим, что

$$z^{(2)} = \frac{\Sigma_I'(0)}{\lambda^2} = \frac{1}{3!}\frac{\Gamma(4-d)}{(4\pi)^d}(m^2)^{d-4}\int_0^1 dudw\frac{w^{2-\frac{d}{2}}(1-w)u(1-u)}{(1-w+wu(1-u))^{1+\frac{d}{2}}} \overset{d=4-\epsilon}{=} \frac{1}{12(4\pi)^4}\frac{1}{\epsilon} + O(1). \tag{0.20}$$

и также

$$a^{(2)}\frac{\Gamma(1-\frac{d}{2})}{2(4\pi)^{\frac{d}{2}}(m^2)^{1-\frac{d}{2}}} + b^{(2)} = -\frac{\Gamma(3-d)(m^2)^{d-3}}{3!(4\pi)^d}\int_0^1\frac{dudww^{1-\frac{d}{2}}}{(1-w+wu(1-u))^{\frac{d}{2}}} \tag{0.21}$$

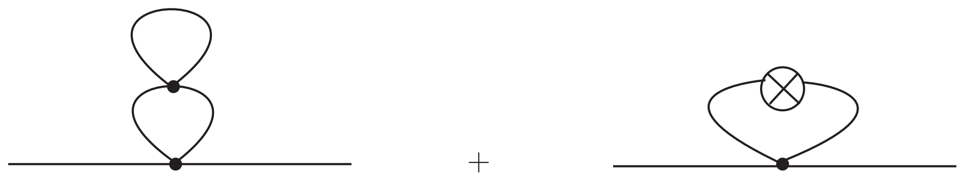
и в лидирующем порядке по ϵ получаем:

$$a^{(2)}(-\frac{m^2}{(4\pi)^2\epsilon} + O(1)) + b^{(2)} = \frac{m^2}{3(4\pi)^4\epsilon^2} + O(1/\epsilon). \tag{0.22}$$

Откуда в конечно итоге мы получим, что

$$\Sigma(p^2) = \Sigma_r(p^2) = \frac{\lambda^2}{3!}\frac{m^2}{(4\pi)^4}\int_0^1\frac{dudw}{wA^2}(p^2B - (1+p^2B)\log(1+p^2B)), \tag{0.23}$$

где $A = 1 - w + wu(1-u)$ и $B = \frac{u(1-u)w(1-w)}{Am^2}$.
Мы не включили сюда диаграммы вида:



Покажем, что их сумма равна нулю, если использовать коэффициенты $z^{(1)}$ и $b^{(1)}$, которые мы нашли в пункте (a). Имеем

$$-\frac{\lambda}{2}\int\frac{d^dk}{(2\pi)^d}\frac{1}{k^2+m^2}\Big(-\frac{\lambda}{2}\int\frac{d^dq}{(2\pi)^d}\frac{1}{q^2+m^2}\Big)\frac{1}{k^2+m^2} - \frac{\lambda}{2}\int\frac{d^dk}{(2\pi)^d}\frac{1}{k^2+m^2}\Big(-\lambda(k^2z^{(1)} + b^{(1)})\Big)\frac{1}{k^2+m^2} =$$
$$= -\frac{\lambda}{2}\int\frac{d^dk}{(2\pi)^d}\frac{1}{k^2+m^2}\Big(-\frac{\lambda}{2}\int\frac{d^dq}{(2\pi)^d}\frac{1}{q^2+m^2} - \lambda b^{(1)}\Big)\frac{1}{k^2+m^2} = -\frac{\lambda}{2}\int\frac{d^dk}{(2\pi)^d}\frac{1}{k^2+m^2}\Big(0\Big)\frac{1}{k^2+m^2} = 0. \tag{0.24}$$