Листок 13. Перенормировка оператора $\phi^2(x)$ в теории ϕ^4

(Сканы/фото решений данного листка принимаются до: **22.12.13**
на e-mail: grigory@princeton.edu)

◯ 1. (100 баллов)

В этой задаче мы будем изучать перенормировку оператора $O(x) = \phi^2(x)$ в теории ϕ^4 в 4 мерном Евклидовом пространстве используя метод размерной регуляризации. Статистическая сумма нашей теории записывается как

$$Z = \int D\phi_0 \exp\big(- \int d^4x(\frac{1}{2}(\partial_\mu\phi_0)^2 + \frac{1}{2}m_0^2\phi_0^2 + \frac{\lambda_0}{4!}\phi_0^4)\big), \tag{0.1}$$

где m_0 называется “затравочной"(“голой”) массой и λ_0 затравочная константа связи. Мы вводим новое поле ϕ и константы связи λ и m^2 по формулам

$$\begin{aligned} &\phi_0 = Z^{1/2}\phi, \\ &m_0^2 = Z^{-1}(m^2 + \delta m^2), \\ &\lambda_0 = Z^{-2}(\lambda + \delta\lambda), \end{aligned} \tag{0.2}$$

где $\delta Z = Z - 1$, $\delta m^2 = Zm_0^2 - m^2$ и $\delta\lambda = Z^2\lambda_0 - \lambda$ контрчлены. И статистическая сумма запишется как

$$Z = \int D\phi \exp\big(- \int d^4x(\frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2 + \frac{\lambda}{4!}\phi^4 + \frac{\delta Z}{2}(\partial_\mu\phi)^2 + \frac{1}{2}\delta m^2\phi^2 + \frac{\delta\lambda}{4!}\phi^4)\big). \tag{0.3}$$

Определим $W^{(\phi^2,2)}(x|x_1,x_2)$ по формуле:

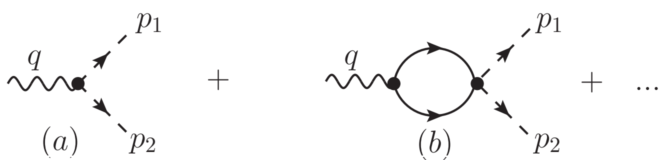
$$W^{(\phi^2,2)}(x|x_1,x_2) = \langle\phi^2(x)\phi(x_1)\phi(x_2)\rangle_{\text{связн}} = \langle\phi^2(x)\phi(x_1)\phi(x_2)\rangle - \langle\phi^2(x)\rangle\langle\phi(x_1)\phi(x_2)\rangle. \tag{0.4}$$

Удобно перейти в импульсное пространство и определить $\Gamma^{(\phi^2,2)}(q|p_1,p_2)$:

$$\Gamma^{(\phi^2,2)}(q|p_1,p_2) = \frac{W^{(\phi^2,2)}(q|p_1,p_2)}{W(p_1)W(p_2)}, \quad q = p_1 + p_2, \tag{0.5}$$

где $\Gamma^{(\phi^2,2)}(q|p_1,p_2)$ уже дается суммой всех связанных одночастично неприводимых диаграмм[1]:

$\Gamma^{(\phi^2,2)}(q|p_1,p_2) \;=$



Таким обозом мы находим, что

$$\Gamma^{(\phi^2,2)}(q|p_1,p_2) = 1 - \frac{\lambda}{2}I(p_{12}^2) + ..., \tag{0.6}$$

[1]Внешнии линии обозначаются здесь пунктиром, а волнистая линия просто обозначает, что в корреляционную функцию вставленна внешняя вершина-оператор с полным импульсом q.

где $I(p^2)$ интеграл, который мы вычисляли на предыдущих лекциях. Мы знаем, что $I(p_{12}^2) = I_r(p_{12}^2) + I(0)$, где I_r конечен при $\epsilon \to 0$, а $I(0) = (m^2)^{d/2-2}\Gamma(2-d/2)/(4\pi)^{d/2}$ сингулярная часть, то есть мы видим, что в данных диаграммах есть расходимости. Мы можем определить перенормированный оператор $[\phi^2]_R$ и $\Gamma^{([\phi^2]_R,2)}$ по формулам:

$$\phi^2 = Z_2^{-1}[\phi^2]_R, \quad \Gamma^{(\phi^2,2)} = Z_2^{-1}\Gamma^{([\phi^2]_R,2)}, \tag{0.7}$$

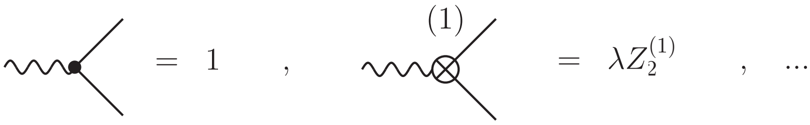
так, что $\Gamma^{([\phi^2]_R,2)}$ имеет уже конечный предел при $\epsilon \to 0$. Удобно написать

$$[\phi^2]_R = Z_2\phi^2, \tag{0.8}$$

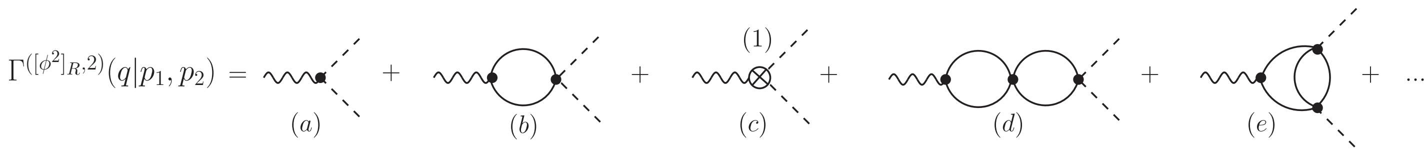
где коэффициент Z_2 находится порядок за порядком по степени λ:

$$Z_2 = 1 + \lambda Z_2^{(1)} + \lambda^2 Z_2^{(2)} + \ldots. \tag{0.9}$$

Поэтому вычисление корреляционной функции с вставкой ренормированного оператора $[\phi^2]_R$, эквивалентно добавлению к нашей диаграммной технике серии контрчленных вершин:



Поэтому для корреляционной функции $\Gamma^{([\phi^2]_R,2)}$ мы получим следующие диаграммы:



И коэффициенты контрчленов $Z_2^{(1)}, Z_2^{(2)}, \ldots$ подбираются таким образом, чтобы сократить расходимости. Мы выбираем ренормализационное условие в виде[2]

$$\Gamma^{([\phi^2]_R,2)}(0|0,0) = 1. \tag{0.10}$$

И мы можем легко найти, что $Z_2^{(1)} = \frac{1}{2}I(0)$ и $\Gamma^{([\phi^2]_R,2)} = 1 - \frac{\lambda}{2}I_r(p_{12}^2) + O(\lambda^2)$.

Покажите, что во втором порядке по λ, можно найти такое $Z_2^{(2)}$, что $\Gamma^{([\phi^2]_R,2)}$ не будет иметь сингулярностей. Помимо диаграмм (d) и (e) вам нужно найти еще три дополнительные диаграммы, которые дадут вклад в λ^2 порядке, одна из этих диаграмм есть просто операторный контрчлен $Z_2^{(2)}$. Также не забывайте, что у нас есть и обычные контрчлены. (*Подсказка:* Вспомните анализ двухпетлевой перенормировки для $\Gamma^{(4)}$).

[2] Как всегда у нас есть свобода в выборе конечной части контрчленных коэффициентов. Мы фиксируем эту свободу выбором ренормализационного условия.