Листок 13. Перенормировка оператора $\phi^2(x)$ в теории ϕ^4

Решение

◯ 1. (100 баллов)

В этой задаче мы будем изучать перенормировку оператора $O(x) = \phi^2(x)$ в теории ϕ^4 в 4 мерном Евклидовом пространстве используя метод размерной регуляризации. Статистическая сумма нашей теории записывается как

$$Z = \int D\phi_0 \exp\Big(-\int d^4x (\frac{1}{2}(\partial_\mu \phi_0)^2 + \frac{1}{2} m_0^2 \phi_0^2 + \frac{\lambda_0}{4!}\phi_0^4)\Big), \qquad (0.1)$$

где m_0 называется “затравочной"(“голой”) массой и λ_0 затравочная константа связи. Мы вводим новое поле ϕ и константы связи λ и m^2 по формулам

$$\begin{aligned} \phi_0 &= Z^{1/2}\phi, \\ m_0^2 &= Z^{-1}(m^2 + \delta m^2), \\ \lambda_0 &= Z^{-2}(\lambda + \delta\lambda), \end{aligned} \qquad (0.2)$$

где $\delta Z = Z - 1$, $\delta m^2 = Z m_0^2 - m^2$ и $\delta\lambda = Z^2\lambda_0 - \lambda$ контрчлены. И статистическая сумма запишется как

$$Z = \int D\phi \exp\Big(-\int d^4x (\frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + \frac{\lambda}{4!}\phi^4 + \frac{\delta Z}{2}(\partial_\mu\phi)^2 + \frac{1}{2}\delta m^2 \phi^2 + \frac{\delta\lambda}{4!}\phi^4)\Big). \qquad (0.3)$$

Определим $W^{(\phi^2,2)}(x|x_1,x_2)$ по формуле:

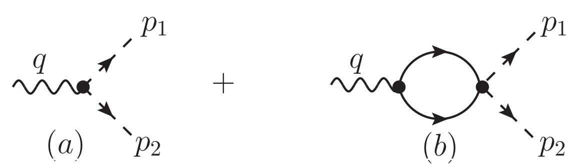
$$W^{(\phi^2,2)}(x|x_1,x_2) = \langle \phi^2(x)\phi(x_1)\phi(x_2)\rangle_{\text{связн}} = \langle \phi^2(x)\phi(x_1)\phi(x_2)\rangle - \langle \phi^2(x)\rangle\langle\phi(x_1)\phi(x_2)\rangle. \qquad (0.4)$$

Удобно перейти в импульсное пространство и определить $\Gamma^{(\phi^2,2)}(q|p_1,p_2)$:

$$\Gamma^{(\phi^2,2)}(q|p_1,p_2) = \frac{W^{(\phi^2,2)}(q|p_1,p_2)}{W(p_1)W(p_2)}, \quad q = p_1 + p_2, \qquad (0.5)$$

где $\Gamma^{(\phi^2,2)}(q|p_1,p_2)$ уже дается суммой всех связанных одночастично неприводимых диаграмм[1]:

$\Gamma^{(\phi^2,2)}(q|p_1,p_2) \;=$



$+ \; ...$

Таким обозом мы находим, что

$$\Gamma^{(\phi^2,2)}(q|p_1,p_2) = 1 - \frac{\lambda}{2} I(p_{12}^2) + ..., \qquad (0.6)$$

где $I(p^2)$ интеграл, который мы вычисляли на предыдущих лекциях. Мы знаем, что $I(p_{12}^2) = I_r(p_{12}^2) + I(0)$, где I_r конечен при $\epsilon \to 0$, а $I(0) = (m^2)^{d/2-2}\Gamma(2 - d/2)/(4\pi)^{d/2}$ сингулярная часть, то

[1] Внешнии линии обозначаются здесь пунктиром, а волнистая линия просто обозначает, что в корреляционную функцию вставленна внешняя вершина-оператор с полным импульсом q.

есть мы видим, что в данных диаграммах есть расходимости. Мы можем определить перенормированные операторы $[\phi^2]_R$ и $\Gamma^{([\phi^2]_R,2)}$ по формулам:

$$\phi^2 = Z_2^{-1}[\phi^2]_R, \quad \Gamma^{(\phi^2,2)} = Z_2^{-1}\Gamma^{([\phi^2]_R,2)}, \tag{0.7}$$

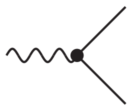
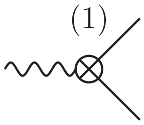
так, что $\Gamma^{([\phi^2]_R,2)}$ имеет уже конечный предел при $\epsilon \to 0$. Удобно написать

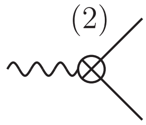
$$[\phi^2]_R = Z_2\phi^2, \tag{0.8}$$

где коэффициент Z_2 находится порядок за порядком по степени λ:

$$Z_2 = 1 + \lambda Z_2^{(1)} + \lambda^2 Z_2^{(2)} + \dots. \tag{0.9}$$

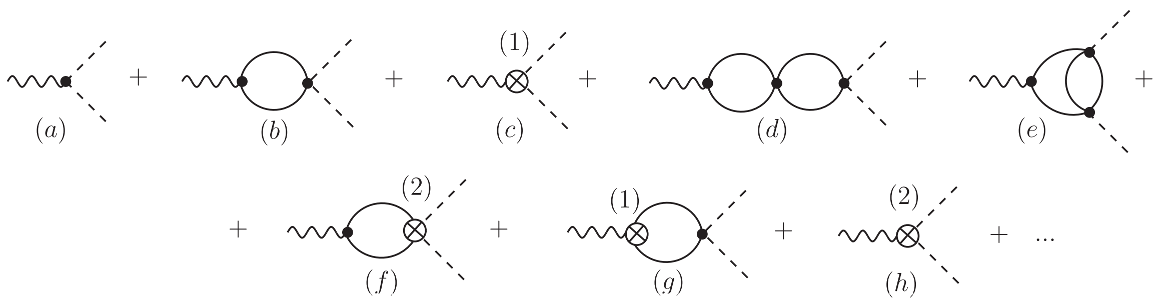
Поэтому вычисление корреляционной функции с вставкой ренормированного оператора $[\phi^2]_R$, эквивалентно добавлению к нашей диаграммной технике серии контрчленных вершин:


$= 1$,


$= \lambda Z_2^{(1)}$,


$= \lambda^2 Z_2^{(2)}$, ...

Поэтому для корреляционной функции $\Gamma^{([\phi^2]_R,2)}$ мы получим следующие диаграммы:

$\Gamma^{([\phi^2]_R,2)}(q|p_1,p_2) =$


И коэффициенты контрчленов $Z_2^{(1)}, Z_2^{(2)}, \dots$ подбираются таким образом, чтобы сократить расходимости. Мы выбираем ренормализационное условие в виде[2]

$$\Gamma^{([\phi^2]_R,2)}(0|0,0) = 1. \tag{0.10}$$

Далее имеем

$$(a) = 1, \quad (b) = -\frac{\lambda}{2}\int \frac{d^dk}{(2\pi)^d}\frac{1}{(k^2+m^2)((q+k)^2+m^2)} = -\frac{\lambda}{2}I(q^2), \quad (c) = \lambda Z_2^{(1)}. \tag{0.11}$$

Вычисляем интеграл $I(q^2)$ используя Фейнмановские параметры:

$$\begin{aligned}
I(q^2) &= \int \frac{d^dk}{(2\pi)^d}\frac{1}{(k^2+m^2)((q+k)^2+m^2)} = \int \frac{d^dk}{(2\pi)^d}\int_0^1 dx \frac{1}{(x(q+k)^2+(1-x)k^2+m^2)^2} = \\
&= \int_0^1 dx \int \frac{d^dk}{(2\pi)^d}\frac{1}{(k^2+2xqk+m^2+xq^2)^2} = \int_0^1 dx \int \frac{d^dk}{(2\pi)^d}\frac{1}{((k+xq)^2+m^2+x(1-x)q^2)^2} = \\
&= \frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}}\int_0^1 dx (m^2+x(1-x)q^2)^{\frac{d}{2}-2}.
\end{aligned} \tag{0.12}$$

[2]Как всегда у нас есть свобода в выборе конечной части контрчленных коэффициентов. Мы фиксируем эту свободу выбором ренормализационного условия.

При $d=4$, Гамма-функция имеет полюс: $\Gamma(2-\frac{d}{2})=\frac{2}{\epsilon}-\gamma+O(\epsilon)$, где $d=4-\epsilon$, чтобы устранить данную сингулярность мы вычитаем из $I(q^2)$ интеграл на нулевом импульсе $I(0)$:

$$I_r(q^2)=I(q^2)-I(0)=-\frac{1}{(4\pi)^2}\int_0^1 dx\log\big(1+x(1-x)\frac{q^2}{m^2}\big)=$$
$$=-\frac{1}{16\pi^2}\Bigg(\sqrt{\frac{q^2+4m^2}{q^2}}\log\frac{\sqrt{q^2+4m^2}+\sqrt{q^2}}{\sqrt{q^2+4m^2}-\sqrt{q^2}}-2\Bigg), \tag{0.13}$$

также замечая, что очевидно $I_r(0)=0$. В итоге получаем ($q=p_1+p_2=p_{12}$):

$$\Gamma^{([\phi^2]_R,2)}(q|p_1,p_2)=1-\frac{\lambda}{2}I_r(q^2)-\lambda(\frac{1}{2}I(0)-Z_2^{(1)})+O(\lambda^2). \tag{0.14}$$

и из условия (0.10) следует, что $Z_2^{(1)}=\frac{1}{2}I(0)$ и $\Gamma^{([\phi^2]_R,2)}=1-\frac{\lambda}{2}I_r(p_{12}^2)+O(\lambda^2)$.

Покажем, что во втором порядке по λ, можно найти такое $Z_2^{(2)}$, что $\Gamma^{([\phi^2]_R,2)}$ не будет иметь сингулярностей. Имеем

$$(d)=\frac{(-\lambda)^2}{4}(I(q^2))^2,\quad (f)=-\frac{\delta\lambda^{(2)}}{2}I(q^2)=-\frac{a^{(2)}\lambda^2}{2}I(q^2),\quad (g)=-\frac{\lambda^2Z_2^{(1)}}{2}I(q^2),\quad (h)=\lambda^2Z_2^{(2)}, \tag{0.15}$$

где $\delta\lambda=a^{(1)}\lambda+a^{(2)}\lambda^2+...$, и контрчлен $a^{(2)}=\frac{3}{2}I(0)$, находился из однопетлевой перенормировки вершины ϕ^4. Диаграмма (e) более сложная и дается интегралом

$$(e)=\frac{(-\lambda)^2}{2}\int\frac{d^dk}{(2\pi)^d}\frac{1}{k^2+m^2}\frac{1}{(q+k)^2+m^2}I((k+p_1)^2). \tag{0.16}$$

Вычислим его опять используя Фейнмановские параметры

$$(e)=\frac{\lambda^2\Gamma(2-\frac{d}{2})}{2(4\pi)^{d/2}}\int_0^1 dx\int\frac{d^dk}{(2\pi)^d}\frac{1}{k^2+m^2}\frac{1}{(q+k)^2+m^2}\frac{1}{(m^2+x(1-x)(k+p_1)^2)^{2-\frac{d}{2}}}=$$
$$=\frac{\lambda^2\Gamma(2-\frac{d}{2})}{2(4\pi)^{d/2}}\int_0^1 dxdy\int\frac{d^dk}{(2\pi)^d}\frac{1}{(k^2+2ykq+yq^2+m^2)^2}\frac{1}{(m^2+x(1-x)(k+p_1)^2)^{2-\frac{d}{2}}}=$$
$$=\frac{\lambda^2\Gamma(4-\frac{d}{2})}{2(4\pi)^{d/2}}\int_0^1 dxdydz\int\frac{d^dk}{(2\pi)^d}\frac{z^{1-\frac{d}{2}}(1-z)}{[z(m^2+x(1-x)(k+p_1)^2)+(1-z)(k^2+2ykq+yq^2+m^2)]^{4-\frac{d}{2}}}=$$
$$=\frac{\lambda^2\Gamma(4-\frac{d}{2})}{2(4\pi)^{d/2}}\int_0^1 dxdydz\int\frac{d^dk}{(2\pi)^d}\frac{z^{1-\frac{d}{2}}(1-z)}{[A(k+\frac{zx(1-x)p_1+y(1-z)q}{1-z+zx(1-x)})^2+P^2+m^2]^{4-\frac{d}{2}}}, \tag{0.17}$$

где $A=1-z+zx(1-x)$ и

$$P^2=\frac{z(1-z)x(1-x)p_1^2+y(1-z)((1-y)(1-z)+zx(1-x))q^2-2xyz(1-x)(1-z)p_1q}{1-z+zx(1-x)}. \tag{0.18}$$

В итоге получаем

$$(e)=\frac{\lambda^2\Gamma(4-d)}{2(4\pi)^d}\int_0^1 dxdydz\frac{z^{1-\frac{d}{2}}(1-z)}{A^{\frac{d}{2}}}(m^2+P^2)^{d-4}. \tag{0.19}$$

Данная диаграмма расходится как $1/\epsilon^2$, одна степень ϵ появляется из Гамма-функции:

$$\Gamma(4-d) = \Gamma(\epsilon) = \frac{1}{\epsilon} - \gamma + O(\epsilon), \tag{0.20}$$

а другая степень из интеграла по z, при интегрировании вблизи $z = 0$:

$$\int_0^1 z^{1-\frac{d}{2}} dz = \int_0^1 dz z^{-1+\frac{\epsilon}{2}} = \frac{2}{\epsilon} z^{\frac{\epsilon}{2}}|_0^1 = \frac{2}{\epsilon}. \tag{0.21}$$

Чтобы изолировать данную сингулярность мы запишем диаграмму (e), как

$$\begin{aligned}(e) =& \frac{\lambda^2\Gamma(4-d)}{2(4\pi)^d} \int_0^1 dxdydz z^{1-\frac{d}{2}} (m^2 + y(1-y)q^2)^{d-4} + \\ &+ \frac{\lambda^2\Gamma(4-d)}{2(4\pi)^d} \int_0^1 dxdydz z^{1-\frac{d}{2}} \left(\frac{(1-z)}{A^{\frac{d}{2}}} (m^2 + P^2)^{d-4} - (m^2 + y(1-y)q^2)^{d-4} \right),\end{aligned} \tag{0.22}$$

где мы использовали то, что $P^2(z = 0) = y(1-y)q^2$ и $A(z = 0) = 1$. Итак, вычисляя первое слагаемое имеем:

$$\begin{aligned}\frac{\lambda^2\Gamma(4-d)}{2(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dxdydz z^{1-\frac{d}{2}} (m^2 + y(1-y)q^2)^{d-4} &= \frac{\lambda^2\Gamma(\epsilon)}{\epsilon(4\pi)^{4-\epsilon}} \int_0^1 dy (m^2 + y(1-y)q^2)^{-\epsilon} = \\ &= \frac{\lambda^2}{\epsilon(4\pi)^4} \big(\frac{1}{\epsilon} - \gamma\big) e^{\epsilon \log 4\pi} \int_0^1 dy e^{-\epsilon \log(m^2 + y(1-y)q^2)} = \\ &= \frac{\lambda^2}{\epsilon(4\pi)^4} \big(\frac{1}{\epsilon} - \gamma\big)(1 + \epsilon \log 4\pi) \int_0^1 dy (1 - \epsilon \log(m^2 + y(1-y)q^2)) = \\ &= \frac{\lambda}{\epsilon(4\pi)^4} \big(\frac{1}{\epsilon} - \gamma\big)(1 + \epsilon \log 4\pi)(1 - \epsilon(\log m^2 - (4\pi)^2 I_r(q^2))) = \\ &= \frac{\lambda^2}{(4\pi)^4} \big(\frac{1}{\epsilon^2} + \frac{1}{\epsilon}(\log \frac{4\pi}{m^2} - \gamma + (4\pi)^2 I_r(q^2))\big) + \text{конечные члены.}\end{aligned} \tag{0.23}$$

Для того, чтобы во втором слагаемом найти член $\sim \frac{1}{\epsilon}$, интеграл достаточно вычислить при $d = 4$:

$$\begin{aligned}\frac{\lambda^2\Gamma(4-d)}{2(4\pi)^d} \int_0^1 dxdydz z^{1-\frac{d}{2}} \left(\frac{(1-z)}{A^{\frac{d}{2}}} (m^2 + P^2)^{d-4} - (m^2 + y(1-y)q^2)^{d-4} \right) &= \\ = \frac{\lambda^2\Gamma(\epsilon)}{2(4\pi)^4} \int_0^1 dxdydz z^{-1} \left(\frac{(1-z)}{A^2} - 1 \right) + \text{конечные члены} &= \\ = \frac{\lambda^2}{2(4\pi)^4} \frac{1}{\epsilon} + \text{конечные члены.}&\end{aligned} \tag{0.24}$$

Теперь замечая, что $I(0) = \frac{2}{\epsilon(4\pi)^2} + \frac{1}{(4\pi)^2}(\log \frac{4\pi}{m^2} - \gamma)$, получаем для диграммы (e):

$$(e) = \frac{\lambda^2}{4} I^2(0) + \frac{\lambda^2}{2} I(0) I_r(q^2) + \text{конечные члены.} \tag{0.25}$$

В итоге получаем

$$
\begin{aligned}
(d)+(e)+(f)+(g)+(h) = \frac{\lambda^2}{4}I^2(q^2) + \frac{\lambda^2}{4}I^2(0) + \frac{\lambda^2}{2}I(0)I_r(q^2) - \frac{3\lambda^2}{4}I(0)I(q^2) - \\
- \frac{\lambda^2}{4}I(0)I(q^2) + \lambda^2 Z_2^{(2)} + \text{конечные члены} = \\
= \lambda^2\left(\frac{1}{4}(I_r(q^2)+I(0))^2 + \frac{1}{4}I(0)^2 + \frac{1}{2}I(0)I_r(q^2) - I(0)(I_r(q^2)+I(0)) + Z_2^{(2)} + \text{к.ч.}\right) = \\
= \lambda^2\left(\frac{1}{4}I_r^2(q^2) - \frac{1}{2}I^2(0) + Z_2^{(2)} + \text{к.ч.}(p_1,p_2)\right),
\end{aligned} \tag{0.26}
$$

откуда мы получаем, что $Z_2^{(2)} = \frac{1}{2}I^2(0) - \text{к.ч.}(0,0)$, и в итоге

$$
\Gamma^{([\phi^2]_R,2)}(q|p_1,p_2) = 1 - \frac{\lambda}{2}I_r(q^2) + \frac{\lambda^2}{4}(I_r^2(q^2) + \text{к.ч.}(p_1,p_2) - \text{к.ч.}(0,0)), \tag{0.27}
$$

отметим, что интеграл $I_r(q^2)$ уже тоже входит во множество конечных членов, но мы оставили здесь его в явном виде.