Листок 2. Квантование поля Клейна-Гордона и эффект Казимира

(Сканы/фото решений данного листка принимаются до: **29.09.13**
на e-mail: grigory@princeton.edu)

◯ 1. Квантование комплексного поля Клейна-Гордона (задача 2.2. П-Ш) (50 баллов)

Рассмотрим комплексное скалярное поле $\phi(x)$ с действием

$$S = \int d^4x(\partial^\mu\phi^*\partial_\mu\phi - m^2\phi^*\phi). \tag{0.1}$$

(a). (10 баллов) Найдите сопряженные импульсы к $\phi(x)$ и $\phi^*(x)$ и канонические коммутационные соотношения. Покажите, что Гамильтониан дается формулой

$$H = \int d^3x(\pi^*\pi + \nabla\phi^*\cdot\nabla\phi + m^2\phi^*\phi). \tag{0.2}$$

Вычислите Гейзенберговское уравнение движения для поля $\phi(x)$ и покажите, что это действительно уравнение движения для поля Клейна-Гордона.

(b). (15 баллов) Диагонализуйте H введя операторы рождения и уничтожения:

$$\phi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3\sqrt{2E_p}}(a_p e^{-ipx} + b_p^\dagger e^{ipx}), \quad E_p = \sqrt{p^2+m^2}. \tag{0.3}$$

Покажите, что теория содержит два набора частиц массой m.

(c). (10 баллов) Перепишите сохраняющийся заряд

$$Q = \int d^3x\frac{i}{2}(\phi^*\pi^* - \pi\phi) \tag{0.4}$$

в терминах операторов рождения и уничтожения и вычислите заряд частиц каждого типа.

(d). (15 баллов) Рассмотрите случай двух комплексных полей Клейна-Гордона одинаковой массы. Обозначим поля ϕ_a, где $a = 1, 2$. Покажите, что теперь есть четыре сохраняющихся заряда. Один дается обобщением части **(c)**, а другие три даются формулой

$$Q^i = \int d^3x\frac{i}{2}(\phi_a^*(\sigma^i)_{ab}\pi_b^* - \pi_a(\sigma^i)_{ab}\phi_b), \tag{0.5}$$

где σ^i матрицы Паули. Обобщите результат на случай n комплексных скалярных полей. Для решения этой задачи, нужно вспомнить из первой лекции, что сохраняющиеся заряды получаются из сохраняющихся токов, а те в свою очередь по теореме Нетер возникают вследствие некоторой симметрии. В данном случае мы имеем дело с симметрией $U(n) = U(1)\times SU(n)$:

$$\phi_a(x) \to \phi_a'(x) = U_{ab}\phi_b(x). \tag{0.6}$$

Сохраняющийся заряд для $U(1)$ это заряд в пункте **(c)**. Для группы $SU(n)$ введем генераторы симметрии $(T^i)_{ab}$, тогда

$$\delta\phi_a = i\alpha^i(T^i)_{ab}\phi_b, \quad \delta\phi_a^* = -i\alpha^i\phi_b^*(T^i)_{ba}, \tag{0.7}$$

Дальше постарайтесь продолжить сами.

◯ 2. Эффект Казимира (50 баллов)

(a). (25 баллов) В данной задаче мы изучим немного иной подход (чем который был на лекции) к эффекту Казимира. Рассмотрите безмассовое скалярное поле в пространстве размерности $d+1$. Пусть само пространство представляет из себя огромный d-мерный куб с длиной стороны D (+ время). В этом пространстве находятся две пластины на расстоянии L друг от друга. Выберем координаты так, чтобы одна пластина находилась в $x_1 = 0$, а вторая в $x_1 = L$. Мы подразумеваем отражающие граничные условия для поля

$$\phi(\vec{x}, t) = 0, \quad \text{при} \quad x_1 = 0, L. \tag{0.8}$$

Также будем считать, что $\phi(\vec{x}, t) = \phi(\vec{x} + D\vec{n}, t)$, где $\vec{n} = (1, 0, ...0)$, то есть у нас переодические граничные условия на гранях огромного ($D \gg L$, в силу этого условия считайте, что спектр вне пластин и вдоль пластин непрерывный) пространства-куба . Таким образом полная энергия вакуума складывается из энергии вакуума между пластинами $E(L)$ и из энергии вакуума вне пластин $E(D-L)$:

$$E = E(L) + E(D-L). \tag{0.9}$$

Покажите, что энергия Казимира на единицу площади дается формулой (здесь A это площадь)

$$\frac{E(L)}{A} = -\frac{\Gamma(-d/2)\zeta(-d)}{2(4\pi)^{d/2}} \left(\frac{\pi}{L}\right)^d. \tag{0.10}$$

При вычислении используйте регуляризацию дзета-функцией:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}. \tag{0.11}$$

Например: $\zeta(-1) = \sum_{n=1}^{\infty} n = -\frac{1}{12}$, (не удивляйтесь, это формальный математический метод регуляризации, часто оказывающийся весьма удобным). Также Γ-функция определяется как

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt. \tag{0.12}$$

Объясните почему наличие квантового поля приводит к силе между пластинами.

(b). (25 баллов) Изучите эффект Казимира в трех пространственных измерениях для поля Клейна-Гордона в случае когда масса m не равна нулю. Граничные условия для ϕ и ход решения точно такие же как на лекции. Используйте, выведенную на лекции, формулу Абеля-Плана:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) - \int_0^{\infty} f(\tau) d\tau = -\frac{1}{2} f(0) + i \int_0^{\infty} dt \frac{f(it) - f(-it)}{e^{2\pi t} - 1} \tag{0.13}$$

(из которой в свою очередь получалась формула Эйлера-Маклорена). Обратите внимание на то, что у подынтегральной функции есть точки ветвления и поэтому $f(it)$ не на всей области интегрирования равна $f(-it)$. Найдите силу на единицу площади $F(a, m)$, где a — растояние между пластинами (не ожидайте, что ответ будет элементарной функцией!) Найдите асимптотики $F(a, m)$ для $am \ll 1$ и $am \gg 1$. (Обратите внимание, что если в этой задаче наивно использовать формулу Эйлера-Маклорена, а не Абеля-Плана, то мы получим для энергии Казимира ноль, что очевидно физически неверно!)