Листок 2. Квантование поля Клейна-Гордона и эффект Казимира

Решения

◯ 1. Квантование комплексного поля Клейна-Гордона (задача 2.2. П-Ш) (50 баллов)

(a). (15 баллов) • Из действия

$$S = \int d^4x(\partial^\mu \phi^* \partial_\mu \phi + m^2|\phi|^2) \tag{0.1}$$

получаем

$$\pi = \frac{\delta S}{\delta \dot{\phi}} = \dot{\phi}^*, \quad \pi^* = \frac{\delta S}{\delta \dot{\phi}^*} = \dot{\phi}. \tag{0.2}$$

Для Гамильтониана находим

$$\mathcal{H}(x) = \int d^3x\big(\pi^* \cdot \pi + \nabla\phi^* \cdot \nabla\phi + m^2|\phi|^2\big). \tag{0.3}$$

Используем

$$[\phi(x), \pi(y)]|_{x^0=y^0} = i\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) \tag{0.4}$$

и получаем

$$\begin{aligned}\dot{\pi}(x^0, \vec{x}) &= -i\big[\pi(x^0, \vec{x}), \int d^3y(\pi^*(x^0, \vec{y})\pi(x^0, \vec{y}) + \nabla\phi^*(x^0, \vec{y})\nabla\phi(x^0, \vec{y}) + m^2|\phi(x^0, \vec{y})|^2)\big] = \\ &= -i\int d^3y\big(-\nabla^2\phi^*(x^0, \vec{y})(-i)\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) - im^2\phi^*(x^0, \vec{y})\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y})\big) = \\ &= (\nabla^2 - m^2)\phi^*(x^0, \vec{x}).\end{aligned} \tag{0.5}$$

В итоге находим ($\dot{\pi} = \ddot{\phi}^*$)

$$\ddot{\phi}^* - \nabla^2\phi^* + m^2\phi^* = (-\partial^2 + m^2)\phi^* = 0. \tag{0.6}$$

(b). (15 баллов) Так как $\phi(x)$ комплексное поле, то в его разложении по модам участвуют два разных типа оператора рождения и уничтожения a_p, b_p:

$$\phi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3\sqrt{2E_{\vec{p}}}}(a_{\vec{p}}e^{i\vec{p}\vec{x}} + b^\dagger_{\vec{p}}e^{-i\vec{p}\vec{x}}). \tag{0.7}$$

Для импульса получаем

$$\pi(x) = i\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\sqrt{\frac{E_{\vec{p}}}{2}}(a^\dagger_{\vec{p}}e^{-i\vec{p}\vec{x}} - b_{\vec{p}}e^{i\vec{p}\vec{x}}), \tag{0.8}$$

где коммутационные соотношения для операторов рождения и уничтожения даются формулами:

$$[a_{\vec{p}}, a^\dagger_{\vec{q}}] = [b_{\vec{p}}, b^\dagger_{\vec{q}}] = (2\pi)^3\delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{q}). \tag{0.9}$$

Далее получаем (пусть $x^0 = 0$)

$$\int d^3x\pi^*(x)\pi(x) = \int \frac{d^3xd^3pd^3q}{(2\pi)^6}\frac{\sqrt{E_{\vec p}E_{\vec q}}}{2}(a_{\vec p}e^{i\vec p\vec x} - b^\dagger_{\vec p}e^{-i\vec p\vec x})(a^\dagger_{\vec q}e^{-i\vec q\vec x} - b_{\vec q}e^{i\vec q\vec x}) =$$
$$= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{E_{\vec p}}{2}(a_{\vec p}a^\dagger_{\vec p} - a_{\vec p}b_{-\vec p} - b^\dagger_{\vec p}a^\dagger_{-\vec p} + b^\dagger_{\vec p}b_{\vec p}),$$
$$\int d^3x\nabla\phi^*(x)\nabla\phi(x) = \int \frac{d^3xd^3pd^3q}{(2\pi)^6}\frac{1}{2\sqrt{E_{\vec p}E_{\vec q}}}(-ia^\dagger_{\vec p}\vec p e^{-i\vec p\vec x} + i\vec p\vec b_{\vec p}e^{i\vec p\vec x})(i\vec q a_{\vec q}e^{i\vec q\vec x} - i\vec q b^\dagger_{\vec q}e^{-i\vec q\vec x}) =$$
$$= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\vec p}}(\vec p^2 a^\dagger_{\vec p}a_{\vec p} + \vec p^2 a^\dagger_{\vec p}b^\dagger_{-\vec p} + \vec p^2 b_{\vec p}a_{-\vec p} + \vec p^2 b_{\vec p}b^\dagger_{\vec p}),$$
$$\int d^3x\, m^2|\phi|^2 = \int \frac{d^3xd^3pd^3q}{(2\pi)^6}\frac{m^2}{2\sqrt{E_{\vec p}E_{\vec p}}}(a^\dagger_{\vec p}a_{\vec p} + a^\dagger_{\vec p}b^\dagger_{-\vec p} + b_{\vec p}a_{-\vec p} + b_{\vec p}b^\dagger_{\vec p}). \tag{0.10}$$

В итоге получаем для Гамильтониана

$$H = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\big[\frac{E_{\vec p}}{2}(a_{\vec p}a^\dagger_{\vec p} + a^\dagger_{\vec p}a_{\vec p} + b^\dagger_{\vec p}b_{\vec p} + b_{\vec p}b^\dagger_{\vec p}) + \frac{E_{\vec p}}{2}(a^\dagger_{\vec p}b^\dagger_{-\vec p} + b_{\vec p}a_{-\vec p} - a_{-\vec p}b_{\vec p} - b^\dagger_{-\vec p}a^\dagger_{\vec p})\big] =$$
$$= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}E_{\vec p}(a^\dagger_{\vec p}a_{\vec p} + b^\dagger_{\vec p}b_{\vec p}) + (\text{бесконечная константа}), \tag{0.11}$$

где $E_{\vec p} = \sqrt{p^2+m^2}$. Таким образом теория описывает две частицы (a и b) массой m.

(c). (15 баллов) Для заряда получаем

$$Q = \frac{i}{2}\int d^3x\,\phi^*\pi^* + (\text{к.с.}) =$$
$$= \frac{i}{2}\int \frac{d^3xd^3pd^3q}{(2\pi)^6}\frac{(-i)}{2}\sqrt{\frac{E_{\vec q t}}{E_{\vec p}}}(a^\dagger_{\vec p}e^{-i\vec p\vec x} + b_{\vec p}e^{i\vec p\vec x})(a_{\vec q}e^{i\vec q\vec x} - b^\dagger_{\vec q}e^{-i\vec q\vec x}) + (\text{к.с.}) =$$
$$= \frac{1}{4}\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}(a^\dagger_{\vec p}a_{\vec p} - a^\dagger_{\vec p}b^\dagger_{-\vec p} + b_{\vec p}a_{-\vec p} - b_{\vec p}b^\dagger_{\vec p} + a^\dagger_{\vec p}a_{\vec p} - b_{-\vec p}a_{\vec p} + a^\dagger_{-\vec p}b^\dagger_{\vec p} - b_{\vec p}b^\dagger_{\vec p}) =$$
$$= \frac{1}{2}\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}(a^\dagger_{\vec p}a_{\vec p} - b^\dagger_{\vec p}b_{\vec p}) + (\text{бесконечная константа}). \tag{0.12}$$

В итоге получаем, что $Q(a) = \frac{1}{2}$ и $Q(b) = -\frac{1}{2}$.

(d). (15 баллов) Итак вариации полей даются формулами

$$\delta\phi_a = i\alpha^i(T^i)_{ab}\phi_b, \quad \delta\phi^*_a = -i\alpha^i\phi^*_b(T^i)_{ba}. \tag{0.13}$$

Откуда для сохраняющегося тока получаем (см. решение Листка 1)

$$j^\mu_i = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_a)}(-i(T_i)_{ab}\phi_b) + (\text{к.с.}) =$$
$$= i\partial^\mu\phi^*_a(T_i)_{ab}\phi_b - i\phi^*_b(T_i)_{ba}\partial^\mu\phi_a. \tag{0.14}$$

В итоге получаем

$$Q_i = \int d^3x j^0_i = -i\int d^3x\dot\phi^*_a(T_i)_{ab}\phi_b + i\int d^3x\phi^*_b(T_i)_{ba}\dot\phi_a. \tag{0.15}$$

Далее замечая, что импульсы равны $\pi_a = \dot{\phi}_a^*$, $\pi_a^* = \dot{\phi}_a$, получаем для зарядов

$$Q_i = i\int d^3x\big[\phi_a^*(T_i)_{ab}\pi_b^* - \pi_a(T_i)_{ab}\phi_b\big]. \tag{0.16}$$

В частном случае группы $SU(2)$ мы имеем

$$(T^i)_{ab} = \frac{1}{2}(\sigma^i)_{ab}. \tag{0.17}$$

◯ 2. Эффект Казимира (50 баллов)

(a). (25 баллов) Итак спектр поля между пластинами

$$\omega_{n,p_2,...,p_d} = \big[\big(\frac{\pi n}{L}\big)^2 + p_2^2 + ... + p_d^2\big]^{1/2} = \big[\big(\frac{\pi n}{L}\big)^2 + \vec{p}_\parallel^{\,2}\big]^{1/2}, \quad n = 1, 2, 3, ... \tag{0.18}$$

Для энергии на единицу площади получаем

$$\begin{aligned}\frac{E(L)}{A} &= \sum_{n=1}^{\infty}\int\frac{d^{d-1}p_\parallel}{(2\pi)^{d-1}}\frac{1}{2}\big[\big(\frac{\pi n}{L}\big)^2 + \vec{p}_\parallel^{\,2}\big]^{1/2} = \\ &= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Omega_{d-1}}{(2\pi)^{d-1}}\int_0^\infty p_\parallel^{d-2}dp_\parallel\big[\big(\frac{\pi n}{L}\big)^2 + \vec{p}_\parallel^{\,2}\big]^{1/2},\end{aligned} \tag{0.19}$$

где $\Omega_{d-1} = \frac{2\pi^{\frac{d-1}{2}}}{\Gamma(\frac{d-1}{2})}$ — площадь $d-2$-мерного шара. Далее делая замену переменных в интеграле $p_\parallel = \big(\frac{\pi n}{L}\big)t$ получаем

$$\frac{E(L)}{A} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\big(\frac{\pi n}{L}\big)^d\frac{\Omega_{d-1}}{(2\pi)^{d-1}}\int_0^\infty dt\, t^{d-2}\sqrt{1+t^2} = \frac{1}{2}\frac{\Omega_{d-1}}{(2\pi)^{d-1}}\frac{\pi^d}{L^d}\zeta(-d)\int_0^\infty dt\, t^{d-2}\sqrt{1+t^2}. \tag{0.20}$$

Далее для интеграла находим

$$\begin{aligned}\int_0^\infty dt t^{d-2}\sqrt{1+t^2} \overset{u=1+t^2}{=} &= \frac{1}{2}\int_1^\infty du u^{1/2}(u-1)^{\frac{d-3}{2}} \overset{v=\frac{1}{u}}{=} \frac{1}{2}\int_0^1 dv\, v^{-\frac{d}{2}-1}(1-v)^{\frac{d}{2}-\frac{3}{2}} = \\ &= \frac{1}{2}B(-\frac{d}{2}, \frac{d-1}{2}) = \frac{\Gamma(-d/2)\Gamma(\frac{d-1}{2})}{2\Gamma(-1/2)}.\end{aligned} \tag{0.21}$$

В итоге получаем

$$\frac{E(L)}{A} = -\frac{1}{2^{d+1}}\zeta(-d)\frac{\pi^{d/2}}{L^d}\Gamma(-\frac{d}{2}). \tag{0.22}$$

И для силы на единицу площади находим

$$\frac{F}{A} = -\frac{\partial}{\partial L}\big(\frac{E(L)}{A} + \frac{E(D-L)}{A}\big) \overset{D\to\infty}{=} \big(-\frac{d}{2}\big)\Gamma(-\frac{d}{2})\frac{\zeta(-d)\pi^{d/2}}{2^d L^{d+1}} = \frac{\pi^{d/2}\Gamma(1-d/2)\zeta(-d)}{2^d L^{d+1}}. \tag{0.23}$$

Мы видим, что пластины притягиваются.

(b). (25 баллов) Итак в данном случае мы имеем

$$\frac{E-E_0}{L^2}=\sum_{n=1}^{\infty}f(n)-\int_0^{\infty}f(\tau)d\tau, \tag{0.24}$$

где

$$f(\tau)=\frac{1}{2}\int\frac{d^2p_{\parallel}}{(2\pi)^2}\sqrt{\vec{p}_{\parallel}^2+\frac{\pi^2\tau^2}{a^2}+m^2}\;\;\Phi\Big(\frac{\vec{p}_{\parallel}^2+\frac{\pi^2\tau^2}{a^2}+m^2}{\Lambda^2}\Big). \tag{0.25}$$

Используя формулу Абеля-Плана находим

$$\sum_{n=1}^{\infty}f(n)-\int_0^{\infty}f(\tau)d\tau=-\frac{1}{2}f(0)+i\int_0^{\infty}dt\frac{f(it)-f(-it)}{e^{2\pi t}-1}. \tag{0.26}$$

Для функции $F(z)=\sqrt{z^2+a^2}$, мы имеем

$$F(iy)=\begin{cases}\sqrt{a^2-y^2}, & |y|<a,\\ i\sqrt{y^2-a^2}, & y>a,\\ -i\sqrt{y^2-a^2}, & y<a.\end{cases} \tag{0.27}$$

В итоге получаем

$$\frac{E-E_0}{L^2}=-\frac{1}{2}f(0)+i\frac{1}{2}\int\frac{d^2p_{\parallel}}{(2\pi)^2}\int\limits_{\sqrt{\frac{a^2}{\pi^2}(p_{\parallel}^2+m^2)}}^{\infty}dt\frac{2i\sqrt{\frac{\pi^2}{a^2}t^2-p_{\parallel}^2-m^2}}{e^{2\pi t}-1}, \tag{0.28}$$

где мы уже убрали ультрафиолетовый регулятор $\Phi(p^2/\Lambda^2)$, так как получившееся выражение сходится. Далее делая замену координат $t=\frac{a}{\pi}\sqrt{p_{\parallel}^2+m^2}x$, получаем

$$\frac{E-E_0}{L^2}=-\frac{1}{2}f(0)-\frac{a}{\pi}\int\frac{d^2p_{\parallel}}{(2\pi)^2}(p_{\parallel}^2+m^2)\int_1^{\infty}dx\frac{\sqrt{x^2-1}}{e^{2ax\sqrt{p_{\parallel}^2+m^2}}-1}. \tag{0.29}$$

Далее для интеграла в правой части формулы делая замену $p_{\parallel}^2=ym^2$ имеем

$$I(am)=\frac{am^4}{4\pi^2}\int_0^{\infty}dy(y+1)\int\limits_1^{\infty}dx\frac{\sqrt{x^2-1}}{e^{2(am)x\sqrt{y+1}}-1}=\frac{am^4}{2\pi^2}\iint_1^{\infty}dydx\frac{y^3\sqrt{x^2-1}}{e^{2(am)xy}-1}. \tag{0.30}$$

Таким образом для силы на единицу площади получаем получаем

$$\frac{F(am)}{L^2}=mI'(am). \tag{0.31}$$

- Теперь если $am\ll 1$, мы находим

$$\begin{aligned}I(am)&=\frac{am^4}{2\pi^2}\iint_1^{\infty}dydx\frac{y^3\sqrt{x^2-1}}{e^{2(am)xy}-1}\overset{t=amy}{=}\frac{am^4}{2\pi^2}\frac{1}{(am)^4}\int_1^{\infty}dx\sqrt{x^2-1}\int_{am}^{\infty}dt\frac{t^3}{e^{2tx}-1}\approx\\ &\approx\frac{1}{2\pi^2a^3}\int_1^{\infty}dx\sqrt{x^2-1}\int_0^{\infty}dt\frac{t^3}{e^{2tx}-1}=\frac{1}{2\pi^2a^3}\int_1^{\infty}dx\sqrt{x^2-1}\frac{\pi^4}{240x^4}=\frac{1}{2\pi^2a^3}\frac{\pi^4}{240}\cdot\frac{1}{3}=\\ &=\frac{\pi^2}{1440a^3}.\end{aligned} \tag{0.32}$$

Откуда для энергии находим в случаем $am \ll 1$:

$$\frac{E-E_0}{L^2} = -\frac{1}{2}f(0) - \frac{\pi^2}{1440a^3}, \quad \text{откуда} \quad \frac{F}{L^2} = \frac{\pi^2}{480a^4}, \tag{0.33}$$

что как раз является ответом для безмассового случая, который был разобран на лекции.

• Теперь если $am \gg 1$, мы получаем

$$I(am) = \frac{am^4}{2\pi^2}\iint_1^\infty dydx\frac{y^3\sqrt{x^2-1}}{e^{2(am)xy}-1} \approx \frac{am^4}{2\pi^2}\iint_1^\infty dydxy^3\sqrt{x^2-1}e^{-2(am)xy} = \frac{am^4}{2\pi^2}\int_1^\infty dyy^3\frac{K_1(2yam)}{2yam} =$$
$$= \frac{m^3}{4\pi^2}\int_1^\infty dyy^2K_1(2yam). \tag{0.34}$$

Далее используя асимптотику для функции бесселя $K_1(x)$ при $x \gg 1$:

$$K_1(x) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2x}}e^{-x}, \tag{0.35}$$

получаем

$$I(am) \approx \frac{m^3}{4\pi^2}\int_1^\infty dyy^2K_1(2yam) = \frac{m^{5/2}}{8\pi^{3/2}a^{1/2}}\int_1^\infty dyy^{3/2}e^{-2yam} \approx \frac{m^3}{16(\pi am)^{3/2}}e^{-2am}. \tag{0.36}$$

Откуда для энергии находим в случаем $am \gg 1$:

$$\frac{E-E_0}{L^2} = -\frac{1}{2}f(0) - \frac{m^3}{16(\pi am)^{3/2}}e^{-2am}, \quad \text{откуда} \quad \frac{F}{L^2} = \frac{m^4}{8(\pi am)^{3/2}}e^{-2am}. \tag{0.37}$$

То есть взаимодействие (притяжение) пластин экспоненциально подавленно.