Листок3. Функции Грина

Решения

◯ 1. Функции Грина для Простого Гармонического Осциллятора (ПГО)

(a). (10 баллов) • Координата $\phi(t)$ в данном случае записывается через операторы рождения и уничтожения как

$$\phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2m}}(ae^{-imt} + a^\dagger e^{imt}). \tag{0.1}$$

Тогда для коммутатора полей находим ($[a, a^\dagger] = 1$):

$$[\phi(t), \phi(0)] = \frac{1}{2m}[ae^{-imt} + a^\dagger e^{imt}, a + a^\dagger] = \frac{1}{2m}(e^{-imt} - e^{imt}) = -\frac{i}{m}\sin(mt). \tag{0.2}$$

Откуда получаем для $G_R(t)$ и $G_A(t)$:

$$\begin{aligned} G_R(t) &= -\frac{i}{m}\theta(t)\sin(mt), \\ G_A(t) &= \frac{i}{m}\theta(-t)\sin(mt). \end{aligned} \tag{0.3}$$

И для пропагатора $G_F(t)$ получаем

$$\begin{aligned} G_F(t) &= \theta(t)\frac{1}{2m}\langle 0|(ae^{-imt} + a^\dagger e^{imt})(a + a^\dagger)|0\rangle + \theta(-t)\frac{1}{2m}\langle 0|(a + a^\dagger)(ae^{-imt} + a^\dagger e^{imt})|0\rangle = \\ &= \theta(t)\frac{1}{2m}e^{-imt} + \theta(-t)\frac{1}{2m}e^{imt} = \frac{1}{2m}e^{-im|t|}. \end{aligned} \tag{0.4}$$

(b). (10 баллов) Мы покажем для G_F (для $G_{R,A}$ аналогично):

$$\begin{aligned} &(\partial_t^2 + m^2)G_F(t) = \\ &(\partial_t^2 + m^2)\left[\theta(t)\langle 0|\phi(t)\phi(0)|0\rangle + \theta(-t)\langle 0|\phi(0)\phi(t)|0\rangle\right] = \delta'(t)\langle 0|\phi(t)\phi(0)|0\rangle - \delta'(t)\langle 0|\phi(0)\phi(t)|0\rangle + \\ &\qquad + 2\delta(t)\langle 0|\dot\phi(t)\phi(0)|0\rangle - 2\delta(t)\langle 0|\phi(0)\dot\phi(t)|0\rangle + \theta(t)\langle 0|(\partial_t^2 + m^2)\phi(t)\phi(0)|0\rangle + \\ &\qquad + \theta(-t)\langle 0|\phi(0)(\partial_t^2 + m^2)\phi(t)|0\rangle. \end{aligned} \tag{0.5}$$

Используя то, что $\delta'(t)f(t) = -\delta(t)f'(t)$, а также то, что $(\partial_t^2 + m^2)\phi(t) = 0$, получаем

$$(\partial_t^2 + m^2)G_F(t) = \delta(t)\langle 0|[\dot\phi(t), \phi(0)]|0\rangle = -i\delta(t). \tag{0.6}$$

Далее, например, имеем

$$G_F(t) - G_R(t) = \frac{e^{imt}}{2m} = f(t), \tag{0.7}$$

что является однородным решением уравнения: $(\partial_t^2 + m^2)f(t) = 0$. Аналогично для других разностей.

Далее имеем при $t \to \pm\infty$:

$$G_R(t) \to \begin{cases} \sim (e^{imt} - e^{-imt}), & t \to +\infty \\ 0, & t \to -\infty \end{cases},$$

$$G_A(t) \to \begin{cases} 0, & t \to +\infty \\ \sim (e^{imt} - e^{-imt}), & t \to -\infty \end{cases},$$

$$G_F(t) \to \begin{cases} \sim e^{-imt}, & t \to +\infty \\ \sim e^{imt}, & t \to -\infty \end{cases}, \tag{0.8}$$

и мы видим, что все функции имееют разное поведение при $t \to \pm\infty$.

(c). (10 баллов) Для фурье образа получаем

$$(-\omega^2 + m^2)\tilde{G}(\omega) = -i, \tag{0.9}$$

откуда

$$\tilde{G}(\omega) = \frac{i}{\omega^2 - m^2}. \tag{0.10}$$

Для обратного преобразования имеем:

$$G(t) = i \int_C \frac{d\omega}{2\pi} \frac{e^{-i\omega t}}{\omega^2 - m^2}. \tag{0.11}$$

Мы видим, что на действительной оси есть два полюса в точках $\omega_1 = -m$ и $\omega_2 = m$. Ответ для функции Грина завит от выбора контура интегрирования C. Если контур C идет вдоль действительной оси, чуть выше полюсов, то при интегрировании мы получим, что $G(t) = G_R(t)$. Если контур C идет вдоль действительной оси, чуть ниже полюсов, то при интегрировании мы получим, что $G(t) = G_A(t)$. Если контур C идет ниже полюса $\omega_1 = -m$, но выше полюса $\omega_2 = m$, то при интегрировании мы получим, что $G(t) = G_F(t)$.

◯ **2. (40 баллов) Пропагатор Фейнмана** По аналогии с пунктом (b) задачи 1, получаем

$$\begin{aligned}(\partial_\mu \partial^\mu + m^2) D_F(\vec{x}, t) =& \delta'(t)\langle 0|\phi(\vec{x}, t)\phi(0,0)|0\rangle - \delta'(t)\langle 0|\phi(0,0)\phi(\vec{x}, t)|0\rangle + \\ &+ 2\delta(t)\langle 0|\dot{\phi}(\vec{x}, t)\phi(0,0)|0\rangle - 2\delta(t)\langle 0|\phi(0,0)\dot{\phi}(\vec{x}, t)|0\rangle = \\ =& \delta(t)\langle 0|[\dot{\phi}(\vec{x}, 0), \phi(0,0)]|0\rangle = i\delta(t)\langle 0|[\pi(\vec{x}, 0), \phi(0,0)]|0\rangle = -i\delta(t)\delta^{(3)}(\vec{x}) = \\ =& - i\delta^{(4)}(x).\end{aligned} \tag{0.12}$$

◯ **3. (30 баллов) Амплитуда для частицы поля Клейна-Гордона (П-Ш, з. 2.3)** Пусть $(x^0 - y^0) = t$ и $\vec{x} - \vec{y} = \vec{r}$, и $(x-y)^2 = t^2 - r^2 < 0$. Так как амплитуда Лоренц инвариантна (докажите как упражнение), то мы можем перейти в систему координат в которой $x^0 - y^0 = 0$ и $\vec{x} - \vec{y} = \vec{r}$. Тогда для амплитуды получаем

$$\begin{aligned}D(x-y) =& \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\sqrt{p^2 + m^2}} e^{i\vec{p}\vec{r}} = \frac{2\pi}{(2\pi)^3} \int_0^\infty dp \frac{p^2}{2\sqrt{p^2+m^2}} \int_{-1}^1 d\cos\theta e^{ipr\cos\theta} = \\ =& \frac{1}{8\pi^2} \int_0^\infty dp \frac{p^2}{\sqrt{m^2+p^2}} \frac{e^{ipr} - e^{-ipr}}{ipr} = -\frac{i}{8\pi^2 r} \int_{-\infty}^\infty dp \frac{p e^{ipr}}{\sqrt{p^2+m^2}}.\end{aligned} \tag{0.13}$$

У интеграла есть две точки ветвления $p = \pm im$. Изогнем контур так, чтобы он сел на вертикальный разрез, идущий от im до $+i\infty$, тогда получим для амплитуды, делая замену $\rho = -ip$:

$$D(x-y) = \frac{1}{4\pi^2 r}\int_m^\infty d\rho \frac{\rho e^{-\rho r}}{\sqrt{\rho^2 - m^2}} \overset{\rho = m\,\mathrm{ch}\xi}{=} \frac{m}{4\pi^2 r}\int_0^\infty d\xi\,\mathrm{ch}\xi e^{-mr\,\mathrm{ch}\xi} = \frac{mK_1(mr)}{4\pi^2 r} =$$
$$= \frac{m}{4\pi^2\sqrt{-(x-y)^2}} K_1(m\sqrt{-(x-y)^2}), \qquad (0.14)$$

где $K_1(x)$ функция Макдональда.