Листок 4. Континуальный интеграл в Квантовой Механике

Решения

◯ 1. Евклидова корреляционная функция

(a). (25 баллов) Имеем для $D(x_E)$

$$D(x_E) = \int_0^\infty d\tau \int \frac{d^4 p_E}{(2\pi)^4} e^{-\tau(p_E^2+m^2)} e^{ip_E x_E} = \int_0^\infty d\tau \frac{1}{16\pi^2\tau^2} e^{-\frac{x_E^2}{4\tau}-\tau m^2} \overset{\tau=\frac{|x_E|}{2m}t}{=}$$
$$= \frac{m}{8\pi^2|x_E|}\int_0^\infty \frac{dt}{t^2} e^{-\frac{1}{2}m|x_E|(t+\frac{1}{t})}. \tag{0.1}$$

Далее, так как $m|x_E| \gg 1$, мы можем воспользоваться методом перевала. Для этого находим для седловой точки:

$$(t+\frac{1}{t})' = 1 - \frac{1}{t^2} = 0, \quad \text{откуда} \quad t_0 = 1. \tag{0.2}$$

Далее подставляя $t = t_0 + \delta t$, получаем

$$D(x_E) = \frac{m}{8\pi^2|x_E|}\int_0^\infty \frac{dt}{t^2} e^{-\frac{1}{2}m|x_E|(t+\frac{1}{t})} \approx \frac{m}{8\pi^2|x_E|} e^{-m|x_E|} \int_{-\infty}^\infty d(\delta t) e^{-\frac{1}{2}m|x_E|(\delta t)^2} =$$
$$= \frac{m}{8\pi^2|x_E|} e^{-m|x_E|} \sqrt{\frac{2\pi}{m|x_E|}} \sim \frac{m^{1/2}}{|x_E|^{3/2}} e^{-m|x_E|}. \tag{0.3}$$

(b). (25 баллов) Имеем

$$D(x_E) = \int_0^\infty d\tau \frac{1}{16\pi^2\tau^2} e^{-\frac{x_E^2}{4\tau}-\tau m^2}. \tag{0.4}$$

Используя формулу

$$K_\nu(2\sqrt{pq}) = \frac{1}{2}\left(\frac{p}{q}\right)^{\nu/2} \int_0^\infty x^{\nu-1} e^{-px-q/x} dx, \tag{0.5}$$

находим ($p = m^2,\ q = x_E^2/4,\ \nu = -1$)

$$D(x_E) = \frac{m}{4\pi^2|x_E|} K_{-1}(m|x_E|) = \frac{m}{4\pi^2|x_E|} K_1(m|x_E|). \tag{0.6}$$

◯ 2. Оператор эволюции (в мнимом времени $\tau = it$)

(a). (25 баллов) Мы можем записать решение уравнения

$$-\frac{\partial}{\partial\tau}\hat{U}(\tau,\tau_0) = \hat{H}(\tau) U(\tau,\tau_0), \qquad \hat{U}(\tau_0,\tau_0) = \hat{I}, \tag{0.7}$$

в форме (см. Пескин Шредер, глава 4)

$$\hat{U}(\tau,\tau_0) = \hat{I} - \int_{\tau_0}^\tau d\tau_1 \hat{H}(\tau_1) + \int_{\tau_0}^\tau d\tau_1 \int_{\tau_0}^{\tau_1} d\tau_2 \hat{H}(\tau_1)\hat{H}(\tau_2) - ... =$$
$$= \hat{I} - \int_{\tau_0}^\tau d\tau_1 \hat{H}(\tau_1) + \frac{1}{2!}\int_{\tau_0}^\tau d\tau_1 d\tau_2 T\{\hat{H}(\tau_1)\hat{H}(\tau_2)\} - ... \equiv T\{e^{-\int_{\tau_0}^\tau d\tau' \hat{H}(\tau')}\}, \tag{0.8}$$

где символ T означает временное упорядочение, т.е. оператор с большим временем ставится слева от оператора с меньшим. Далее имеем

$$T\{\big(\int_{\tau_0}^{\tau} d\tau'\hat{H}(\tau')\big)^n\} = C_n^k T\{\big(\int_{\tau_1}^{\tau} d\tau'\hat{H}(\tau')\big)^k\big(\int_{\tau_0}^{\tau_1} d\tau'\hat{H}(\tau')\big)^{n-k}\} = \\ = C_n^k T\{\big(\int_{\tau_1}^{\tau} d\tau'\hat{H}(\tau')\big)^k\} T\{\big(\int_{\tau_0}^{\tau_1} d\tau'\hat{H}(\tau')\big)^{n-k}\}, \tag{0.9}$$

где $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. В итоге получаем, что

$$\hat{U}(\tau,\tau_0) = T\{e^{-\int_{\tau_0}^{\tau} d\tau'\hat{H}(\tau')}\} = T\{e^{-\int_{\tau_1}^{\tau} d\tau'\hat{H}(\tau')}\}T\{e^{-\int_{\tau_0}^{\tau_1} d\tau'\hat{H}(\tau')}\} = \hat{U}(\tau,\tau_1)\hat{U}(\tau_1,\tau_0). \tag{0.10}$$

(b). (25 баллов) Имеем $\langle q|\hat{U}(\tau,\tau_0)|q'\rangle = e^{-\sigma(q,q'|\tau_0)}$, где

$$\sigma(q,q'|\tau_0) = \frac{1}{\Delta}\sigma_0(q,q'|\tau_0) + a\log\Delta + b + \Delta\sigma_1(q,q'|\tau_0) + O(\Delta^2), \tag{0.11}$$

тогда ($\Delta = \tau - \tau_0$):

$$-\frac{\partial}{\partial\tau}e^{-\sigma(q,q'|\tau_0)} = -\frac{\partial}{\partial\Delta}e^{-\sigma(q,q'|\tau_0)} = (-\frac{1}{\Delta^2}\sigma_0(q,q'|\tau_0) + \frac{a}{\Delta} + \sigma_1(q,q'|\tau_0) + O(\Delta))e^{-\sigma(q,q'|\tau_0)}, \\ -\frac{1}{2}\partial_q^2 e^{-\sigma(q,q'|\tau_0)} = \big(-\frac{1}{2\Delta^2}(\partial_q\sigma_0(q,q'|\tau_0))^2 + \frac{1}{2\Delta}\partial_q^2\sigma_0(q,q'|\tau_0) - \partial_q\sigma_0(q,q'|\tau_0)\partial_q\sigma_1(q,q'|\tau_0)\big)e^{-\sigma(q,q'|\tau_0)}. \tag{0.12}$$

Получаем в порядке $1/\Delta^2$

$$(\partial_q\sigma_0(q,q'|\tau_0))^2 = 2\sigma_0(q,q'|\tau_0), \tag{0.13}$$

откуда

$$\sigma_0(q,q'|\tau_0) = \frac{1}{2}(q-q_0)^2. \tag{0.14}$$

Далее в порядке $1/\Delta$ находим

$$a = \frac{1}{2}. \tag{0.15}$$

Далее имеем

$$e^{-\sigma(q,q'|\tau_0)} = \frac{1}{e^b\sqrt{\Delta}}e^{-\frac{(q-q_0)^2}{2\Delta}} \overset{\Delta\to 0}{\to} \frac{\sqrt{2\pi}}{e^b}\delta(q-q_0) \tag{0.16}$$

и используя граничное условие $\langle q|\hat{U}(\tau_0,\tau_0)|q'\rangle = \delta(q-q')$ мы находим

$$q_0 = q', \quad b = \frac{1}{2}\log 2\pi. \tag{0.17}$$

Далее в порядке Δ^0 получаем уравнение

$$\sigma_1(q,q'|\tau_0) = -\partial_q\sigma_0(q,q'|\tau_0)\partial_q\sigma_1(q,q'|\tau_0) + V(q,\tau), \tag{0.18}$$

откуда

$$\sigma_1(q,q'|\tau_0)+(q-q')\partial_q\sigma_1(q,q'|\tau_0)=V(q,\tau). \qquad (0.19)$$

Далее получаем

$$\partial_q((q-q')\sigma_1(q,q'|\tau_0))=V(q,\tau), \quad \text{откуда} \quad \sigma_1(q,q'|\tau_0)=\frac{1}{q-q'}\int_{q'}^{q}V(y|\tau_0)dy. \qquad (0.20)$$

В конечном итоге мы получили

$$\langle q|\hat{U}(\tau,\tau_0)|q'\rangle=\frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta}}e^{-\frac{(q-q')^2}{2\Delta}-\frac{\Delta}{q-q'}\int_{q'}^{q}V(y|\tau_0)dy}. \qquad (0.21)$$