Листок 5. Связь континуального интеграла и классической статфизики

(Сканы/фото решений данного листка принимаются до: **20.10.13**
на e-mail: grigory@princeton.edu)

◯ 1. (25 баллов) Полубесконечная струна

Рассмотрим полубесконечную струну в некотором потенциале V, положения точек которой задается функцией $q(\tau)$, где $\tau \in [0, +\infty)$. Граничное условие для левого конца струны $q(0) = q_0$. А статистический вес конфигурации задается формулой

$$[Dq(\tau)]\exp(-\beta W[q(\tau)]) = [Dq(\tau)]\exp(-\beta \int d\tau \big(V(q(\tau)) + \frac{1}{2}(\frac{dq(\tau)}{d\tau})^2\big)), \tag{0.1}$$

где член $\frac{1}{2}\big(\frac{dq(\tau)}{d\tau}\big)^2$ представляет упругую энергию деформации. Покажите, что q_0-зависимость для статистической суммы

$$Z(q_0) = \mathrm{const}\cdot\Psi_0(q_0), \tag{0.2}$$

где $\Psi_0(q)$ — волновая функция основного состояния Гамильтониана

$$\hat{H} = \frac{1}{2}\hat{p}^2 + V(\hat{q}). \tag{0.3}$$

◯ 2 (25 баллов). Временное упорядочение

На лекции мы нашли, что корреляционная функция координат струны ($A[q(\tau)] = \beta W[q(\tau)]$):

$$G(\tau_1, ..., \tau_N) \overset{\mathrm{def}}{=} \langle q(\tau_1)...q(\tau_N)\rangle = \frac{1}{Z}\int [Dq(\tau)]q(\tau_1)...q(\tau_N)e^{-A[q(\tau)]}, \tag{0.4}$$

может быть представлена как

$$\langle q(\tau_1)...q(\tau_N)\rangle = \langle 0|\hat{q}_E(\tau_N)\hat{q}_E(\tau_{N-1})...\hat{q}_E(\tau_1)|0\rangle, \tag{0.5}$$

где $\hat{q}_E(\tau) = e^{\hat{H}\tau}\hat{q}e^{-\hat{H}\tau}$ — оператор координаты в представлении Гейзенберга в мнимом времени, и $\hat{q}|q_0\rangle = q_0|q_0\rangle$ (Вопрос на засыпку **(5 баллов)**: как выглядит собственная волновая функция $\psi_{q_0}(q) = \langle q|q_0\rangle$ оператора координаты q, в координатном представлении, с собственным значением q_0: $\hat{q}\psi_{q_0}(q) = q_0\psi_{q_0}(q)$?). Важно, что все операторы поставлены в порядке убывания времени: $\tau_N \geqslant \tau_{N-1} \geqslant ... \geqslant \tau_1$. Далее, если мы хотим аналитически продолжить функцию $G(\tau_1, ..., \tau_N)$, то есть рассмотреть ее значения для комплексных чисел $\tau_1, ..., \tau_N$, то это имеет смысл только если выполняется неравенство

$$\mathrm{Re}\tau_N \geqslant \mathrm{Re}\tau_{N-1} \geqslant ... \geqslant \mathrm{Re}\tau_1, \tag{0.6}$$

то есть $G(\tau_1, ..., \tau_N)$ аналитична только в этой области. Покажите, что делая Виковский поворот: $\tau_k = e^{i\alpha}t_k$, где $\alpha \to \frac{\pi}{2} - 0$, мы получим соотношение

$$\langle q(\tau_1)...q(\tau_N)\rangle = \langle 0|T\big(\hat{q}(t_1)...\hat{q}(t_N)\big)|0\rangle, \tag{0.7}$$

где $\tau_k = (i-0)t_k$ и $\hat{q}(t_k)$ обычный оператор Гейзенберга в реальном времени и символ T означает временное упорядочение — то есть операторы с большим временем ставятся слева от операторов с меньшим.

◯ **3. Теорема Вика для ПГО (Простого Гармонического Осциллятора)**

(a). (25 баллов) Пусть $\phi(t)$ координата обычного гармонического осциллятора, то есть

$$\phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2m}}(ae^{-imt} + a^\dagger e^{imt}). \tag{0.8}$$

Докажите, что

$$T(\phi(t)\phi(t')) = G_F(t-t') + :\phi(t)\phi(t'):, \tag{0.9}$$

где $: \ :$ обозначает нормальное упорядочение — то есть мы должны все операторы уничтожения поставить справа от операторов рождения (например $:aa^\dagger aa^\dagger: = (a^\dagger)^2 a^2$), и где пропагатор Фейнмана дается формулой

$$G_F(t) = \langle 0|T(\phi(t)\phi(0))|0\rangle. \tag{0.10}$$

Обобщите (0.9) на произведение $2n$ полей и используйте это для доказательства теоремы Вика:

$$\langle 0|T(\phi(t_1)\phi(t_2)...\phi(t_{2n}))|0\rangle = \sum_{\text{по всем парам}} G_F(t_{i_1} - t_{i_2})...G_F(t_{i_{2n-1}} - t_{i_{2n}}). \tag{0.11}$$

(b). (25 баллов) Вычислите явно

$$\langle 1|T(\phi(t_1)\phi(t_2)\phi(t_3)\phi(t_4))|1\rangle, \tag{0.12}$$

где $|1\rangle$ — первое возбужденное состояние ПГО, и проверьте, что теорема Вика не работает. Что не так в этом случае?