Листок 7. Функциональный интеграл в теории Клейна-Гордона

Решения.

◯ 1. (40 баллов) Действие мировой линии и пропагатор Фейнмана

(a). (10 баллов) Классическое действие для релятивистской частицы массы m дается произведением m с собственным временем вдоль мировой линии частицы

$$S[x] = -m\int d\tau = -m\int_0^1 ds\sqrt{-\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu}, \tag{0.1}$$

где $\dot{A} = \frac{\partial A}{\partial s}$. Такое релятивисткое действие мировой линии инвариантно относительно репараметризаций $s \to s'(s)$, где $s'(0) = 0$, $s'(1) = 1$, and $ds'/ds > 0$. Введем множитель Лагранжа $\lambda(s) > 0$. Покажем, что следующее действие

$$S[x, \lambda] = \frac{1}{2}\int_0^1 ds\left(\frac{\dot{x}^2(s)}{\lambda(s)} - m^2\lambda(s)\right) \tag{0.2}$$

классически эквивалентно (— в итоге дает тоже самое уравнение движения для x^μ) действию (0.1). С одной стороны для уравнения (0.1) получаем следующие уравнения движения

$$\delta_x S[x] = 0, \quad \text{откуда:} \quad \frac{d}{ds}\left(\frac{m\dot{x}^\mu}{\sqrt{-\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu}}\right) = 0. \tag{0.3}$$

С другой стороны уравнения движения для уравнения (0.2) следующие

$$\delta_\lambda S[x, \lambda] = 0, \quad \text{откуда:} \quad \frac{\dot{x}^2}{\lambda^2} + m^2 = 0, \tag{0.4}$$

и мы находим $\lambda = \frac{1}{m}\sqrt{-\dot{x}^2}$. Теперь подставляя это в действие (0.2) мы получим

$$S[x, \lambda] = \frac{1}{2}\int_0^1 ds\left(-m\frac{-\dot{x}^2}{\sqrt{-\dot{x}^2}} - m^2\frac{1}{m}\sqrt{-\dot{x}^2}\right) = -m\int_0^1 ds\sqrt{-\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu} = S[x]. \tag{0.5}$$

Альтернативно мы можем также найти уравнения движения для x у уравнения (0.2), имеем

$$\delta_x S[x, \lambda] = 0, \quad \text{откуда:} \quad \frac{d}{ds}\left(\frac{\dot{x}^\mu}{\lambda}\right) = 0, \tag{0.6}$$

подставляя в него $\lambda = \frac{1}{m}\sqrt{-\dot{x}^2}$, получим

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{m\dot{x}^\mu}{\sqrt{-\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu}}\right) = 0, \tag{0.7}$$

что совпадает с уравнениями движения для исходного действия $S[x]$. Теперь в добавок, мы введем импульс p_μ. Покажем, что

$$S[x, \lambda, p] = -\int_0^1 ds(\dot{x}^\mu p_\mu + \frac{\lambda}{2}(p^2 + m^2)) \tag{0.8}$$

классически эквивалентно действию (0.1). Аналогично находим уравнения движения, из вариации действия по импульсу:

$$\delta_p S[x,\lambda,p] = 0, \quad \text{откуда:} \quad \dot{x}^\mu + \lambda p^\mu = 0, \tag{0.9}$$

откуда мы находим, что $p^\mu = -\frac{1}{\lambda}\dot{x}^\mu$ и подставляя это в действие (0.8) имеем

$$S[x,\lambda,p] = -\int_0^1 ds(-\dot{x}^\mu \frac{1}{\lambda}\dot{x}_\mu + \frac{\lambda}{2}(\frac{1}{\lambda^2}\dot{x}^2 + m^2)) = \frac{1}{2}\int_0^1 ds\left(\frac{\dot{x}^2(s)}{\lambda(s)} - m^2\lambda(s)\right) = S[x,\lambda]. \tag{0.10}$$

То есть мы пришли к действию $S[x,\lambda]$, которое как мы уже показали эквивалентно действию $S[x]$.

(b). (10 баллов) Покажем, что действие (0.8) инвариантно относительно репараметризаций, если $\lambda(s)$ преобразуется определенным образом. Имеем, при преобразовании $s' = s'(s)$:

$$ds' = \frac{ds'}{ds}ds, \quad \frac{dx^\mu}{ds} = \frac{dx^\mu}{ds'}\frac{ds'}{ds}, \tag{0.11}$$

и теперь если мы определим преобразование для $\lambda(s)$ как $\lambda(s) = \lambda'(s')\frac{ds'}{ds}$, то мы получим

$$\begin{aligned} S[x,\lambda,p] &= -\int ds(\dot{x}^\mu p_\mu + \frac{\lambda}{2}(p^2+m^2)) = -\int_0^1 ds'\frac{ds}{ds'}\left(\frac{ds'}{ds}\frac{dx^\mu}{ds'}p_\mu + \frac{ds'}{ds}\frac{\lambda'(s')}{2}(p^2+m^2)\right) = \\ &= -\int_0^1 ds'\big(\frac{dx^\mu}{ds'}p_\mu + \frac{\lambda'(s')}{2}(p^2+m^2)\big) = S[x,\lambda,p]. \end{aligned} \tag{0.12}$$

Используя эту инвариантность, покажем, что можно фиксировать $\lambda(s) = \tau$, где $\tau > 0$ и не зависит от s. Имеем

$$\lambda'(s') = \frac{ds}{ds'}\lambda(s), \tag{0.13}$$

и пусть $\lambda'(s') = \tau > 0$, тогда мы получаем уравнение для $s'(s)$:

$$\frac{ds}{ds'}\lambda(s) = \tau, \quad \text{откуда} \quad \frac{ds'}{ds} = \frac{1}{\tau}\lambda(s), \tag{0.14}$$

и решение данного уравнения

$$s'(s) = \frac{1}{\tau}\int_0^s \lambda(x)dx, \quad \text{где} \quad \tau = \int_0^1 \lambda(s)ds. \tag{0.15}$$

То есть мы явно построили преобразование $s'(s)$ при котором $\lambda'(s') = \tau$.

Теперь мы определим пропагатор Фейнмана $G_F(x,y)$ как интеграл по путям из одной точки пространства x в другую y:

$$G_F(x,y) = \int_x^y [dx]\int [d\lambda][dp]e^{\frac{i}{\hbar}S[x,\lambda,p]}. \tag{0.16}$$

(c). (10 баллов) Используя эквивалентность между инегралом по путям и Шредингеровской формулировкой квантовой механики, покажем, что

$$G_F(x,y) = \int_0^\infty d\tau \langle y|e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}\tau}|x\rangle, \tag{0.17}$$

с $\hat{H} = \hat{p}^2 + m^2$. Имеем

$$\int [d\lambda] = \mathrm{Vol(diff)} \times \int_0^\infty d\tau, \tag{0.18}$$

где Vol(diff) — объем группы репараметризаций. (На самом деле данная формула требует уточнения и более детального вывода, но здесь мы опустим эти детали). В итоге получаем

$$G_F(x,y) = \int_x^y [dx] \int [d\lambda][dp] e^{\frac{i}{\hbar} S[x,\lambda,p]} = \int_0^\infty d\tau \int_x^y [dx][dp] e^{-\frac{i}{\hbar}\int_0^1 ds (\dot{x}^\mu p_\mu + \frac{\tau}{2}(p^2+m^2))}. \tag{0.19}$$

С другой стороны мы знаем, что

$$\langle y | e^{-\frac{iHT}{\hbar}} | x \rangle = \int [dx][dp] e^{\frac{i}{\hbar}\int_0^T dt (p_\mu \dot{x}^\mu - H(x,p))}, \tag{0.20}$$

откуда получим

$$\int_x^y [dx][dp] e^{-\frac{i}{\hbar}\int_0^1 ds (\dot{x}^\mu p_\mu + \frac{\tau}{2}(p^2+m^2))} = \langle y | e^{\frac{i}{\hbar}(-\frac{\tau}{2}(p^2+m^2))} | x \rangle = \langle y | e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}\frac{\tau}{2}} | x \rangle. \tag{0.21}$$

Далее переобозначим τ, как $\tau \to 2\tau$, чтобы избавиться от лишнего фактора 1/2. Такой скейлинг приведет к коэффициенту 2 перед всем интегралом, но у нас уже и так есть численный коэффициент, равный объему группы репараметризаций, так что все вычисления которые мы делаем, определены с точностью до константы. В итоге находим

$$G_F(x,y) = \int_0^\infty d\tau \langle y | e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}\tau} | x \rangle. \tag{0.22}$$

Интеграл по τ, как мы уже знаем, называется интегралом Швингера по собственному времени. Чтобы сделать этот интеграл формально хорошо определенным — сходящимся, мы добаляем маленькую мнимую часть к Гамильтониану $\hat{H} \to \hat{H} - i\epsilon$.

(d). (10 баллов) Покажем, что это требование сходимости, по сути эквивалентно $i\epsilon$ прескрипции для пропагатора Фейнмана:

$$G_F(x,y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{e^{ip(x-y)}}{p^2+m^2-i\epsilon}. \tag{0.23}$$

Вставим два раза полный набор состояний $1 = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} |p\rangle\langle p|$ в формулу для $G_F(x,y)$, получим

$$\begin{aligned} G_F(x,y) &= \int_0^\infty d\tau \langle y | e^{-\frac{i}{\hbar}(\hat{H}-i\epsilon)\tau} | x \rangle = \int_0^\infty d\tau \int \frac{d^4p d^4q}{(2\pi)^8} \langle y|q\rangle \langle q | e^{-\frac{i}{\hbar}(\hat{H}-i\epsilon)\tau} | p \rangle \langle p | x \rangle = \\ &= \int_0^\infty d\tau \int \frac{d^4p d^4q}{(2\pi)^8} e^{-iqy} (2\pi)^4 \delta(p-q) e^{-\frac{i}{\hbar}(p^2+m^2-i\epsilon)\tau} e^{ipx} = \\ &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{ip(x-y)} \int_0^\infty d\tau e^{-\frac{i}{\hbar}(p^2+m^2-i\epsilon)\tau} = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{ip(x-y)} \frac{\hbar}{i(p^2+m^2-i\epsilon)}. \end{aligned} \tag{0.24}$$

Но, так как мы вычисляем все с точностью до константы, то мы действительно можем написать, что

$$G_F(x,y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{e^{ip(x-y)}}{p^2+m^2-i\epsilon}. \tag{0.25}$$

◯ **2. (20 баллов) Сходимость теории возмущений в 0-мерной Квантовой теории поля (КТП)**

Большое понимание КТП может быть получено из изучения интеграла

$$Z(j) = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\frac{1}{2}x^2 - \frac{\lambda}{4!}x^4 + jx}, \tag{0.26}$$

где $\lambda \geqslant 0$ и $j \in \mathbb{R}$. Этот интеграл может рассматриваться как производящий функционал для Евклидовой КТП в $d = 0$ пространстве времени. Заметим, что данный интеграл быстро сходится.

(a). (10 баллов) Положим $\lambda = 0$ и вычислим $Z(j)$ в этом случае. Имеем

$$Z(j) = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\frac{1}{2}x^2 + jx} = \int dx e^{-\frac{1}{2}(x-j)^2 + \frac{j^2}{2}} = \sqrt{2\pi} e^{\frac{1}{2}j^2}. \tag{0.27}$$

Используем это, чтобы вычислить свободные "функции Грина":

$$\langle x^n \rangle = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} dx\, x^n\, e^{-\frac{1}{2}x^2}}{\int dx e^{-\frac{1}{2}x^2}}, \tag{0.28}$$

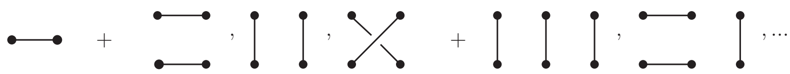
где $n \geqslant 1$. Очевидно, что если $n = 2k+1$ то $\langle x^{2k+1} \rangle = 0$. Для $n = 2k$ получим

$$\langle x^{2k} \rangle = \left(\frac{d}{dj}\right)^{2k} e^{\frac{j^2}{2}} \Bigg|_{j=0} = (2k-1)!!. \tag{0.29}$$

В итоге получаем

$$\langle x^n \rangle = \begin{cases} 0, & n \quad \text{нечетное}, \\ (n-1)!!, & n \quad \text{четное}. \end{cases} \tag{0.30}$$

В терминах диаграмм Фейнмана, $\langle x^{2k} \rangle$ есть число способов соединить $2k$ точек попарно:



(b). (10 баллов) Теперь рассмотрим $Z(0)$ для $\lambda > 0$. Предполагая, что λ достаточно мало, разложим $Z(0)$ по теории возмущений $Z(0) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n Z_n$ и вычислим Z_n. Имеем

$$Z(0) = \int dx e^{-\frac{1}{2}x^2 - \frac{\lambda}{4!}x^4} = \int dx \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(-\frac{\lambda}{4!}x^4\right)^n e^{-\frac{1}{2}x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(-\frac{\lambda}{4!}\right)^n \int dx x^{4n} e^{-\frac{1}{2}x^2} =$$
$$= \sqrt{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(-\frac{\lambda}{4!}\right)^n \langle x^{4n} \rangle. \tag{0.31}$$

В итоге получаем для Z_n:

$$Z_n = \sqrt{2\pi} \frac{(-1)^n}{n!(4!)^n} \langle x^{4n} \rangle = \sqrt{2\pi}(-1)^n \frac{(4n-1)!!}{n!(4!)^n} = \sqrt{2\pi}(-1)^n \frac{(4n)!}{2^{2n}(2n)!n!(4!)^n} = \frac{\sqrt{2\pi}(-1)^n}{2^{5n}3^n} \frac{(4n)!}{n!(2n)!}. \tag{0.32}$$

Покажем, что Z_n растет факториально с $n \to \infty$, для этого используем формулу Стирлинга:

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n, \tag{0.33}$$

откуда получаем

$$Z_n = \frac{\sqrt{2\pi}(-1)^n}{2^{5n}3^n}\frac{(4n)!}{n!(2n)!} \sim \frac{1}{2^{5n}3^n}\frac{(4n)^{4n}}{n^n(2n)^{2n}}\frac{e^n e^{2n}}{e^{4n}} = \frac{2^n}{3^n}\frac{n^n}{e^n} \sim (\frac{2}{3}n)! \tag{0.34}$$

и по этому теория возмущений (ряд Тейлора) имеет нулевой радиус сходимости. Если бы данный ряд имел ненулевой радиус сходимости $R > 0$, то мы бы получили

$$Z(0) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n Z_n \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} R^n Z_n, \tag{0.35}$$

для $|\lambda| < R$, но тогда $Z(0)$ было бы конечным при $\lambda < 0$, но очевидно, что при $\lambda < 0$ наш интеграл $Z(0)$ расходится.

Казалось бы результат пункта (b) является катастрофой для нашей уверенности в теории возмущений для КТП. На самом деле, такая ситуация закономерна и в Квантовой механике и в КТП, по причинам подобным тем, что мы наблюдали на нашем примере. Эта ситуация не безнадежна по двум причинам. Первая причина состоит в том, что теория возмущений все равно имеет смысл как асимптотическое разложение: покуда мы ограничиваем наше разложение до порядка $n \lesssim \lambda^{-1}$ в теории возмущений, пертурбативный ответ дает нам хорошее приближение к полному ответу. Вторая причина в том, что существуют разные методы (такие как преобразование Бореля), которые позволяют получить полный ответ из знания коэффициентов Z_n теории возмущений, даже если такой ряд формально расходится.

◯ 3. (40 баллов) Уравнение Швингера-Дайсона и петлевое разложение

В интеграле по путям мы тоже можем интегрировать по частям. В этой задаче мы покажем, что это позволяет получить так называемые уравнения Швингера-Дайсона, которые утверждают, что классические уравнения движения выполняются внутри корреляционных функций, с точностью до контактных членов.

(a). (10 баллов) Для разминки, рассмотрим интеграл $I[J] = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-s(x)-Jx}$ с $s(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{\lambda}{4!}x^4$. Покажем, что $I[J]$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $(J + s'[-\frac{\partial}{\partial J}])I[J] = 0$. Это уравнение Швингера-Дайсона для интеграла $I[J]$ — игрушечной модели производящего функционала в КТП. Имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{d}{dx}\left(e^{-s(x)-Jx}\right) = e^{-s(x)-Jx}\Big|_{-\infty}^{\infty} = 0, \tag{0.36}$$

с другой стороны

$$0 = \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{d}{dx}\left(e^{-s(x)-Jx}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} dx(-J - s'(x))e^{-s(x)-Jx} = -(J + s'[-\frac{\partial}{\partial J}])I[J]. \tag{0.37}$$

Так как $s'(x) = x + \frac{\lambda}{6}x^3$, получим

$$\left(\frac{\lambda}{6}\frac{\partial^3}{\partial J^3} + \frac{\partial}{\partial J} - J\right) I[J] = 0. \tag{0.38}$$

(b). (10 баллов) Теперь, рассмотрим статистическую сумму $Z[J] = \int [d\phi] e^{\frac{i}{\hbar}S[\phi(x)] + \frac{i}{\hbar}\int d^d x\, J(x)\phi(x)}$, для взаимодействующей теории поля

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - \frac{g}{3!}\phi^3, \tag{0.39}$$

с источником $J(x)$. Выведим уравнение Швингера-Дайсона для $Z[J]$. Имеем

$$\begin{aligned} 0 = \int [d\phi] \frac{\delta}{\delta\phi(y)} \left(e^{\frac{i}{\hbar}S[\phi(x)] + \frac{i}{\hbar}\int d^d x J(x)\phi(x)} \right) = \int [d\phi] \left(\frac{i}{\hbar} \frac{\delta S[\phi]}{\delta \phi(y)} + \frac{i}{\hbar} J(y) \right) e^{\frac{i}{\hbar}S[\phi(x)] + \frac{i}{\hbar}\int d^d x J(x)\phi(x)} = \\ = \frac{i}{\hbar} \left(J(y) + \frac{\delta S[\frac{\hbar}{i}\frac{\delta}{\delta J(x)}]}{\delta \phi(y)} \right) Z[J] = 0. \end{aligned} \tag{0.40}$$

Далее находим $\frac{\delta S}{\delta \phi(y)} = -(\partial^2 + m^2)\phi(y) - \frac{g}{2}\phi^2(y)$. И мы получим

$$\left(\frac{g}{2} \left(\frac{\hbar}{i} \frac{\delta}{\delta J(y)} \right)^2 + (\partial^2 + m^2) \left(\frac{\hbar}{i} \frac{\delta}{\delta J(y)} \right) - J(y) \right) Z[J] = 0. \tag{0.41}$$

Теперь возьмем оператор, среднее которого мы хотим найти, например произведение полей. Обозначим такой оператор $f[\phi]$. Определим среднее такого оператора $f[\phi]$ как

$$\langle f[\phi] \rangle = \frac{\int [d\phi] f[\phi] e^{\frac{i}{\hbar}S[\phi]}}{\int [d\phi] e^{\frac{i}{\hbar}S[\phi]}}. \tag{0.42}$$

(c). (10 баллов) Выведим следующее уравнение:

$$\left\langle \frac{\delta f[\phi]}{\delta \phi(x)} + \frac{i}{\hbar} f[\phi] \frac{\delta S[\phi]}{\delta \phi(x)} \right\rangle = 0. \tag{0.43}$$

Имеем

$$0 = \frac{\int [d\phi] \frac{\delta}{\delta \phi(x)} \left(f[\phi] e^{\frac{i}{\hbar}S[\phi]} \right)}{\int [d\phi] e^{\frac{i}{\hbar}S[\phi]}} = \left\langle \frac{\delta f[\phi]}{\delta \phi(x)} + \frac{i}{\hbar} f[\phi] \frac{\delta S[\phi]}{\delta \phi(x)} \right\rangle. \tag{0.44}$$

(d). (10 баллов) Рассмотрим разложение $Z[J]$ в терминах статистической суммы свободной теории $Z_0[J]$. Покажем, что такое разложение может быть записанно как ряд по $\hbar$. Имеем

$$Z[J] = \int [d\phi] e^{\frac{i}{\hbar}\int d^d x (\frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - \frac{g}{3!}\phi^3) + \frac{i}{\hbar}\int d^d x J(x)\phi(x)}. \tag{0.45}$$

Сделаем замену $\phi \to \sqrt{\hbar}\phi$ и $J \to \sqrt{h}J$, тогда получим

$$\begin{aligned} Z[J] = \int [d\phi] e^{i\int d^d x (\frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - \frac{g\sqrt{\hbar}}{3!}\phi^3) + i\int d^d x J(x)\phi(x)} = \\ = \int [d\phi] \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int d^d x \frac{-ig\sqrt{\hbar}\phi^3}{3!} \right)^n e^{iS_0[\phi] + i\int d^d x J(x)\phi(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} \hbar^{n/2} \left(\int d^d x \frac{g}{3!} \frac{\delta^3}{\delta J(x)^3} \right)^n Z_0[J]. \end{aligned} \tag{0.46}$$

Также рассмотрим $Z[0]$ как разложение по диаграммам Фейнмана. Покажем, что каждая связная диаграмма Фейнмана пропорциональна $\hbar^{L-1}$, где L — количество петель в диаграмме (количество незафиксированных импульсов у пропагаторов). Имеем

$$\text{Пропагатор} = \langle \phi(x)\phi(y) \rangle = \hbar \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ip(x-y)}, \quad \text{Вершина} = \frac{1}{\hbar} \int d^d x (-\frac{ig}{3!}\phi^3). \quad (0.47)$$

В фурье пространстве, каждая вершина дает фактор $\sim \frac{1}{\hbar}\delta^{(d)}(\sum k_i)$, где дельта функция накладывает условия сохранения энергии и импульса в вершине. Каждый пропагатор дает фактор $\sim \hbar \frac{i}{k^2 - m^2}$. Таким образом выражение для диаграммы общего вида с P пропагаторами и V вершинами будет иметь вид

$$\int \frac{d^d k_1 ... d^d k_P}{(2\pi)^{dP}} \frac{\hbar^P i^P}{(k_1^2 - m^2)...(k_P^2 - m^2)} \frac{1}{\hbar^V} \delta^{(d)}(\sum k_{i_1})...\delta^{(d)}(\sum k_{i_V}) \sim \hbar^{P-V}. \quad (0.48)$$

С другой стороны при интегрировании, дельта функции вершин сократят число интегралов до $L = P - V + 1$. Дополнительная единица в этой формуле происходит из-за того, что остается одна дельта функция, обеспечивающая сохранение входящих и выходящих из диаграммы энергии и импульса. В итоге мы видим, что разложение по петлям идет как $\hbar^{L-1}$, где L — число петель.