Листок 8. Функциональный интеграл для фермионных полей

(Сканы/фото решений данного листка принимаются до: **17.11.13**
на e-mail: grigory@princeton.edu)

◯ 1. (25 баллов) Интегралы по Грассмановым переменным

(a). (10 баллов) Изучите главу 9.5 Пескина Шредера. Покажите, что

$$\Big(\prod_i \int d\theta_i^* d\theta_i\Big) e^{-\theta_i^* B_{ij}\theta_j} = \det B, \tag{0.1}$$

где B — Эрмитова матрица, θ_i — комплексные Грассмановые переменные.

(a). (15 баллов) Вычислите Грассманов интеграл

$$\int d\psi_n ... d\psi_1 e^{\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\psi_i M_{ij}\psi_j}, \tag{0.2}$$

где M антисимметричная комплексная матрица коммутирующих чисел (обычная антисимметричная комплексная матрица), а ψ_i — Грассмановы числа. (*Подсказка:* используйте тот факт, что комплексная антисимметричная матрица может быть приведена к блочно-диагональной форме).

◯ 2. (25 баллов) Теорема Вика для фермионных полей

Выведите формулу для свободного Дираковского поля:

$$\langle\psi(x_1)...\psi(x_n)\bar\psi(y_1)...\bar\psi(y_n)\rangle = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{n+i}S(x_1-y_i)\langle\psi(x_2)...\psi(x_n)\bar\psi(y_1)...\widehat{\bar\psi(y_i)}...\bar\psi(y_n)\rangle, \tag{0.3}$$

где $\langle\psi(x)\bar\psi(y)\rangle = S(x-y)$, а шляпка $\widehat{\ }$ над полем означает, что этого поля нет в корреляционной функции. (*Подсказка:* Рассмотрите функциональный интеграл: $\langle ... \rangle = \frac{1}{Z}\int D\psi' D\bar\psi' ... e^{i\int d^4x\bar\psi'(i\partial\!\!\!/-m)\psi'}$. Сделайте сдвиг полей: $\psi'(x)=\psi(x)$, $\bar\psi'(x)=\bar\psi(x)+\bar\epsilon(x)$, где $\bar\epsilon(x)$ — инфинитезимальная Грассманова функция. Такой сдвиг не изменит значение функционального интеграла, поэтому можно получить дифференциальное уравнение на корреляционную функцию, решение которого и есть формула (0.3).)

◯ 3. (50 баллов) Задача из Пескина Шредера 9.2 пункт (d)

Пусть $\psi(t)$ и $\bar\psi(t)$ два Грассмановых (фермионных) поля. Определим фермионный осциллятор следующим Лагранжианом:

$$L_E = \bar\psi\dot\psi + \omega\bar\psi\psi. \tag{0.4}$$

Данный Лагранжиан соответствует Гамильтониану

$$H = \omega\bar\psi\psi, \quad \text{где} \quad \{\bar\psi,\psi\} = 1, \tag{0.5}$$

то есть это простая двух-уровневая система. Вычислите функциональный интеграл, предполагая что фермионные (Грассмановы) поля удовлетворяют следующим граничным условиям $\psi(t+\beta) = -\psi(t)$ (Почему такие гран. условия?*):

$$Z = \int_{\psi(0)=-\psi(\beta)} D\psi D\bar\psi \exp\Big(-\int_0^\beta dt L_E(\psi(t),\bar\psi(t))\Big). \tag{0.6}$$

(*Подсказка:* Используйте разложение в ряд Фурье). Покажите, что ваш результат воспроизводит статистическую сумму квантово-механической двух-уровневой системы — то есть частица может сидеть либо на одном уровне, либо на другом, а расстояние между уровнями ω и температура $T = 1/\beta$.