Листок 8. Функциональный интеграл для фермионных полей

Решения

◯ 1. (25 баллов) Интегралы по Грассмановым переменным

(a). (10 баллов) Покажем, что

$$\Big(\prod_i \int d\theta_i^* d\theta_i\Big) e^{-\theta_i^* B_{ij}\theta_j} = \det B, \tag{0.1}$$

где B — Эрмитова матрица, θ_i — комплексные Грассмановые переменные. Имеем

$$\Big(\prod_i \int d\theta_i^* d\theta_i\Big) e^{-\theta_i^* B_{ij}\theta_j} = \Big(\prod_i \int d\theta_i'^* d\theta_i'\Big) e^{-\theta_i'^* b_i \theta_j'} = \prod_i b_i = \det B. \tag{0.2}$$

(a). (15 баллов) Вычислим Грассманов интеграл

$$\int d\psi_n ... d\psi_1 e^{\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n \psi_i M_{ij}\psi_j}, \tag{0.3}$$

где M антисимметричная комплексная матрица коммутирующих чисел (обычная антисимметричная комплексная матрица), а ψ_i — Грассмановы числа. Данная матрица M может быть приведена к виду

$$M = \begin{pmatrix} 0 & m_1 & & & \\ -m_1 & 0 & & & \\ & & 0 & m_2 & \\ & & -m_2 & 0 & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}, \tag{0.4}$$

причем если матрица имеет нечетный размер, то на диагонали вместо последнего блока 2×2 стоит ноль. Таким образом в случае матрицы нечетного размера данный интеграл равен нулю. Для матрицы четного размера $n = 2k$ находим

$$\int d\psi_n ... d\psi_1 e^{\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n \psi_i M_{ij}\psi_j} = \int d\psi_{2k}' d\psi_{2k-1}' .... d\psi_2' d\psi_1' e^{m_1\psi_1'\psi_2' + ... m_k \psi_{2k-1}'\psi_{2k}'} = \prod_{i=1}^k m_i = \sqrt{\det M}. \tag{0.5}$$

◯ 2. (25 баллов) Теорема Вика для фермионных полей

Выведем формулу для свободного Дираковского поля:

$$\langle \psi(x_1)...\psi(x_n)\bar\psi(y_1)...\bar\psi(y_n)\rangle = \sum_{i=1}^n (-1)^{n+i} S(x_1 - y_i)\langle \psi(x_2)...\psi(x_n)\bar\psi(y_1)...\widehat{\bar\psi(y_i)}...\bar\psi(y_n)\rangle, \tag{0.6}$$

где $\langle\psi(x)\bar\psi(y)\rangle = S(x-y)$, а шляпка $\widehat{\ }$ над полем означает, что этого поля нет в корреляционной функции. Рассмотрим функциональный интеграл:

$$\frac{1}{Z}\int D\psi' D\bar\psi' \, \psi'(x_2)...\psi'(x_n)\bar\psi'(y_1)...\bar\psi'(y_n) e^{i\int d^4x \bar\psi'(i\partial\!\!\!/ - m)\psi'}. \tag{0.7}$$

Теперь сделаем замену переменных

$$\psi'(x) = \psi(x), \quad \bar{\psi}'(x) = \bar{\psi}(x) + \bar{\epsilon}(x), \tag{0.8}$$

где $\bar{\epsilon}(x)$ — произвольная инфинитезимальная Грассманова функция, быстро затухающая при $x \to \infty$. Имеем

$$\begin{aligned}&\frac{1}{Z}\int D\psi' D\bar{\psi}'\, \psi'(x_2)...\psi'(x_n)\bar{\psi}'(y_1)...\bar{\psi}'(y_n)e^{i\int d^4x\bar{\psi}'(i\not{\partial}-m)\psi'} = \\ &= \frac{1}{Z}\int D\psi D\bar{\psi}\, \psi(x_2)...\psi(x_n)(\bar{\psi}(y_1)...\bar{\psi}(y_n) + \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}\bar{\epsilon}(y_i)\bar{\psi}(y_1)...\widehat{\bar{\psi}(y_i)}...\bar{\psi}(y_n)))e^{i\int d^4x(\bar{\psi}+\bar{\epsilon})(i\not{\partial}-m)\psi},\end{aligned} \tag{0.9}$$

где мы использовали то, что $\bar{\epsilon}$ антикоммутирует со всеми полями. Теперь раскладывая данное выражение до линейных членов по $\bar{\epsilon}$ и учитывая очевидное равенство

$$\begin{aligned}&\frac{1}{Z}\int D\psi' D\bar{\psi}'\, \psi'(x_2)...\psi'(x_n)\bar{\psi}'(y_1)...\bar{\psi}'(y_n)e^{i\int d^4x\bar{\psi}'(i\not{\partial}-m)\psi'} = \\ &\qquad = \frac{1}{Z}\int D\psi D\bar{\psi}\, \psi(x_2)...\psi(x_n)\bar{\psi}(y_1)...\bar{\psi}(y_n)e^{i\int d^4x\bar{\psi}(i\not{\partial}-m)\psi},\end{aligned} \tag{0.10}$$

получим

$$\begin{aligned}0 = &\sum_{i=1}^{n}(-1)^{n+i}\bar{\epsilon}(y_i)\langle\psi(x_2)...\psi(x_n)\bar{\psi}(y_1)...\widehat{\bar{\psi}(y_i)}...\bar{\psi}(y_n)\rangle + \\ &\qquad + i\int d^4x(i\not{\partial}_x - m)\langle\psi(x_2)...\psi(x_n)\bar{\psi}(y_1)...\bar{\psi}_n(y_n)\bar{\epsilon}(x)\psi(x)\rangle,\end{aligned} \tag{0.11}$$

откуда, из произвольности $\bar{\epsilon}(x)$, следует, что

$$\begin{aligned}0 = &\sum_{i=1}^{n}(-1)^{n+i}\delta^{(4)}(x-y_i)\langle\psi(x_2)...\psi(x_n)\bar{\psi}(y_1)...\widehat{\bar{\psi}(y_i)}...\bar{\psi}(y_n)\rangle + \\ &\qquad + i(i\not{\partial}_x - m)\langle\psi(x)\psi(x_2)...\psi(x_n)\bar{\psi}(y_1)...\bar{\psi}_n(y_n)\rangle,\end{aligned} \tag{0.12}$$

и мы в итоге получаем уравнение

$$\begin{aligned}&(i\not{\partial}_x - m)\langle\psi(x)\psi(x_2)...\psi(x_n)\bar{\psi}(y_1)...\bar{\psi}_n(y_n)\rangle = \\ &\qquad = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{n+i}i\delta^{(4)}(x-y_i)\langle\psi(x_2)...\psi(x_n)\bar{\psi}(y_1)...\widehat{\bar{\psi}(y_i)}...\bar{\psi}(y_n)\rangle.\end{aligned} \tag{0.13}$$

Используя то, что $(i\not{\partial}_x - m)S(x-y) = (i\not{\partial}_x - m)\langle\psi(x)\bar{\psi}(y)\rangle = i\delta^{(4)}(x-y)$, мы видим, что решение данного уравнения есть

$$\langle\psi(x)...\psi(x_n)\bar{\psi}(y_1)...\bar{\psi}(y_n)\rangle = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{n+i}S(x-y_i)\langle\psi(x_2)...\psi(x_n)\bar{\psi}(y_1)...\widehat{\bar{\psi}(y_i)}...\bar{\psi}(y_n)\rangle, \tag{0.14}$$

что и требовалось показать.

◯ **3. (50 баллов) Задача из Пескина Шредера 9.2 пункт (d)**

Пусть $\psi(t)$ и $\bar\psi(t)$ два Грассмановых (фермионных) поля. Определим фермионный осциллятор следующим Лагранжианом:

$$L_E = \bar\psi\dot\psi + \omega\bar\psi\psi. \tag{0.15}$$

Данный Лагранжиан соответствует Гамильтониану

$$H = \omega\bar\psi\psi, \quad \text{где} \quad \{\bar\psi, \psi\} = 1, \tag{0.16}$$

то есть это простая двух-уровневая система. Вычислим функциональный интеграл, предполагая что фермионные (Грассмановы) поля удовлетворяют следующим граничным условиям $\psi(t+\beta) = -\psi(t)$:

$$Z = \int\limits_{\psi(0)=-\psi(\beta)} D\psi D\bar\psi \exp\big(- \int_0^\beta dt L_E(\psi(t), \bar\psi(t))\big). \tag{0.17}$$

Раскладывая $\psi(t)$ в ряд Фурье

$$\psi(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \theta_n \frac{e^{\frac{\pi i t}{\beta}(2n+1)}}{\sqrt{\beta}}, \tag{0.18}$$

где θ_n — Грассмановы числа, находим для статистической суммы:

$$Z = \prod_n \int d\bar\theta_n d\theta_n e^{-\sum_n \bar\theta_n\theta_n\left(\frac{\pi i(2n+1)}{\beta}+\omega\right)} = \prod_{n=-\infty}^{\infty}\big(\frac{\pi i(2n+1)}{\beta} + \omega\big) = \prod_{n=0}^{\infty}\big(\omega^2 + \frac{\pi^2(2n+1)^2}{\beta^2}\big), \tag{0.19}$$

затем мы, беря логарифм, получаем:

$$\ln Z = \sum_{n=0}^{\infty} \ln\big(\omega^2 + \frac{\pi^2(2n+1)^2}{\beta^2}\big). \tag{0.20}$$

Дифференцируя данное выражение по ω, находим

$$\frac{\partial \ln Z}{\partial\omega} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2\omega}{\omega^2 + \frac{\pi^2(2n+1)^2}{\beta^2}} = \frac{1}{2}\beta\tanh\left(\frac{\beta\omega}{2}\right). \tag{0.21}$$

Теперь находим

$$\ln Z[\omega] = \ln Z[0] + \ln\cosh\frac{\beta\omega}{2} \tag{0.22}$$

и в конечном итоге

$$Z[\omega] = Z[0]\cosh\frac{\beta\omega}{2}. \tag{0.23}$$

В свою очередь для двух-уровневой системы с щелью ω мы получаем

$$Z[\omega] = e^{-\beta\omega/2} + e^{\beta\omega/2} = 2\cosh\frac{\beta\omega}{2}. \tag{0.24}$$

Теперь разберемся почему в данном случае мы использовали антипериодические граничные условия. Наша цель записать подходящее выражение для следа некоторого оператора:

$$\mathrm{tr}[\hat{O}] \stackrel{\mathrm{def}}{=} O_{\downarrow\downarrow} + O_{\uparrow\uparrow}. \tag{0.25}$$

Во первых, вспомним определение и свойства Грассмановых состояний и операторов. Для Грассманового понижающего оператора $\hat{\psi}$ мы имеем

$$\hat{\psi}|\downarrow\rangle = 0, \quad \hat{\psi}|\uparrow\rangle = |\downarrow\rangle, \tag{0.26}$$

где состояние системы $|\uparrow\rangle$ и $|\downarrow\rangle$ удовлетворяют

$$\langle\downarrow|\downarrow\rangle = \langle\uparrow|\uparrow\rangle = 1, \quad \langle\uparrow|\downarrow\rangle = 0. \tag{0.27}$$

Общий вид собственного вектора для такого оператора есть:

$$|\psi\rangle = |\downarrow\rangle + \psi|\uparrow\rangle, \quad \langle\psi| = -\langle\uparrow| + \langle\downarrow|\psi \tag{0.28}$$

и можно проверить, что

$$\hat{\psi}|\psi\rangle = \psi|\psi\rangle, \quad \langle\psi|\hat{\psi} = -\langle\psi|\psi, \quad \langle\psi|\psi'\rangle = \psi - \psi'. \tag{0.29}$$

Следует заметить, что у $\langle\psi| = -\langle\uparrow| + \langle\downarrow|\psi$, есть знак минус перед $\langle\uparrow|$! Такое определение для бра состояния нужно, чтобы сделать Грассмановы переменные подобными обычным бозонным, т.е. чтобы иметь

$$1 = \int |\psi\rangle d\psi\langle\psi|, \quad \langle\psi|\psi'\rangle = \delta(\psi - \psi') = \psi - \psi'. \tag{0.30}$$

Тогда для любого оператора $\hat{O}$ мы получаем

$$\hat{O}|\uparrow\rangle = |\uparrow\rangle O_{\uparrow\uparrow} + |\downarrow\rangle O_{\downarrow\uparrow}, \quad \hat{O}|\downarrow\rangle = |\downarrow\rangle O_{\downarrow\downarrow} + |\uparrow\rangle O_{\uparrow\downarrow} \tag{0.31}$$

и мы моголи бы ожидать, что формула $\int d\psi\langle\psi|\hat{O}|\psi\rangle$ и есть выражение для следа оператора $\hat{O}$, но

$$\int d\psi\langle\psi|\hat{O}|\psi\rangle = \int d\psi(\psi(O_{\downarrow\downarrow} - O_{\uparrow\uparrow}) - O_{\uparrow\downarrow}) = O_{\downarrow\downarrow} - O_{\uparrow\uparrow} = \mathrm{tr}[(-1)^{\hat{F}}\hat{O}], \tag{0.32}$$

где $(-1)^F$ действует как

$$\langle\uparrow|(-1)^F = -\langle\uparrow|, \quad \langle\downarrow|(-1)^F = \langle\downarrow|. \tag{0.33}$$

То есть мы видим, что такое наивное определение следа не приводит нас к желаемому результату, поэтому, чтобы получить след поератора $\hat{O}$: $O_{\downarrow\downarrow} + O_{\uparrow\uparrow}$, нам нужно записать выражение как

$$\mathrm{tr}[\hat{O}] = O_{\downarrow\downarrow} + O_{\uparrow\uparrow} = \int d\psi\langle\psi|(-1)^{\hat{F}}\hat{O}|\psi\rangle, \tag{0.34}$$

где мы использовали, что $(-1)^{\hat{F}} \cdot (-1)^{\hat{F}} = 1$. Теперь, используя, что $\langle\psi|(-1)^{\hat{F}} = -\langle-\psi|$ мы имеем

$$\mathrm{tr}[\hat{O}] = -\int d\psi\langle-\psi|\hat{O}|\psi\rangle. \tag{0.35}$$

С другой стороны, используя тот же самый метод вывода континуального интеграла, что и для бозонных полей, т.е. вставляя полные наборы из Грассмановым переменных в матричный элемент через каждый небольшой промежуток времени ϵ, мы получаем

$$\langle\psi_f|e^{-\beta H}|\psi_i\rangle = -\int\limits_{\substack{\psi(0)=\psi_i\\ \psi(\beta)=\psi_f}} D\bar{\psi}D\psi \exp\big(-\int_0^\beta dt L_E(\psi(t),\bar{\psi}(t))\big) \tag{0.36}$$

и поэтому для статистической суммы находим

$$Z = \mathrm{tr}[e^{-\beta H}] = -\int d\psi\langle-\psi|e^{-\beta H}|\psi\rangle = \int\limits_{\psi(\beta)=-\psi(0)} D\bar{\psi}D\psi \exp\big(-\int_0^\beta dt L_E(\psi(t),\bar{\psi}(t))\big), \tag{0.37}$$

что и требовалось показать.

Также сделаем небольшое замечание о фермионных переменных. По существу мы имеем два разных разложения фермионного поля $\psi(t)$:

$$\begin{aligned} &1.\quad \psi(t) = \{\psi_n,\quad \psi_n^2=0,\quad n=0,...,N,\quad t_n=\beta\frac{n}{N},\quad N\to\infty\},\\ &2.\quad \psi(t) = \{\sum_{k=-\infty}^{\infty}\theta_k e^{\frac{i\pi kt}{\beta}},\quad \theta_k^2=0\}. \end{aligned} \tag{0.38}$$

Причем, как мы видим для вывода континуального интеграла из матричного элемента (мы не проделали данный вывод, а лишь указали путь к нему, оставив это как упражнение) мы использовали первое разложение, а для вычисления континуального интеграла для нашего конкретного Лагранжиана мы пользовались вторым разложением. На первый взгляд два данных разложени выглядят по-разному, но если мы сделаем время дискретным во втором разложении, то мы получим

$$\psi_n = \sum_{k=0}^{N}\theta_k e^{i\pi k\frac{n}{N}}. \tag{0.39}$$

Из этого выражения мы можем видеть, что ψ_n и θ_k связанны просто унитарной матрицей, поэтому это всего лишь унитарное преобразование, которое обычно называют преобразованием Фурье. В нашем конкретном случае

$$\psi_n = \sum_{k=0}^{N}\theta_k e^{i\pi(2k+1)\frac{n}{N}}, \tag{0.40}$$

и можно получить

$$\psi_0 = \sum_{k=0}^{N}\theta_k,\quad \psi_N = -\sum_{k=0}^{N}\theta_k, \tag{0.41}$$

откуда можно видеть, что $\psi_0 = -\psi_N$.