Листок 9. Диаграммы Фейнмана в координатном пространстве

(Сканы/фото решений данного листка принимаются до: **24.11.13**
на e-mail: grigory@princeton.edu)

Данный листок предназначен для укрепления навыков в рисовании и нахождении диаграм Фейнмана в координатном пространстве. Интегралы вычислять не надо, нужно только их уметь записать, используя теорему Вика для свободного поля, а также, что

$$\langle \phi(x)\phi(y)\rangle_0 \overset{\text{по определению}}{=} \frac{\int D\phi\, \phi(x)\phi(y)e^{iS_0}}{\int D\phi e^{iS_0}} = G(x-y), \tag{0.1}$$

где $S_0 = \frac{1}{2}\int d^dx(\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - m^2\phi^2)$. Обратите внимание на индекс $\langle ....\rangle_0$, который означает, что усреднение идет по свободному полю! Каждый такой пропагатор $G(x-y)$ представляется графически как линия между точками x и y:

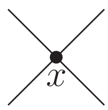
$G(x-y) =$ 

◯ 1. (50 баллов) Диаграммы Фейнмана для теории ϕ^4

Рассмотрим теорию ϕ^4 с взаимодействием $S_I = -\int d^dx \frac{\lambda}{4!}\phi^4(x)$. Если мы хотим найти среднее какого-то числа полей по теории возмущений

$$\langle \phi(x_1)\phi(x_2)....\phi(x_n)\rangle \overset{\text{по определению}}{=} \frac{\int D\phi\, \phi(x_1)\phi(x_2)....\phi(x_n)e^{iS_0+iS_I}}{\int D\phi\, e^{iS_0+iS_I}}, \tag{0.2}$$

мы раскладываем возмущение в ряд Тейлора $e^{iS_I} = e^{-i\int d^4x\frac{\lambda}{4!}\phi^4(x)} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(iS_I)^k}{k!}$, и дальше усредняем все (берем функциональный интеграл) по свободному полю. То есть на деле мы просто применяем уже доказанную нами теорему Вика, то есть находим все возможные попарные свертки полей. Каждый множитель iS_I генерирует на языке диаграмм Фейнмана вершину — узел из которого в теории ϕ^4 торчат 4 отрезка:

$\frac{\lambda}{4!}\phi^4(x) =$ 

Выражение вида $\frac{(iS_I)^k}{k!}$ пропорционально λ^k, и мы говорим о нем, как о k порядке в теории возмущений.

(a). (10 баллов) Начнем с простого рассмотрения вакуумных диаграмм. Рассмотрите функциональный интеграл

$$\int D\phi\, e^{iS_0+iS_I} \tag{0.3}$$

и найдите выражения для диаграмм Фейнмана до второго порядка включительно (λ^2). Нарисуйте все диаграммы.

(b). (20 баллов) Покажите, что вакуумные диаграммы "экспоненцируются", то есть можно написать

$$\int D\phi\, e^{iS_0+iS_I} = \exp\left(\text{сумма по всем связным вакуумным диаграммам}\right), \tag{0.4}$$

где связными называются диаграммы, которые представляют собой один связный граф. (*Подсказка*: эта задача разобрана в Пескине и Шредере в параграфе 4.4. Пескин и Шредер работают в операторном формализме, но это по сути ничего не меняет).

(c). (10 баллов) Следствием пункта (b) является то, что мы можем написать

$$\begin{aligned}\langle\phi(x_1)\phi(x_2)....\phi(x_n)\rangle &= \frac{\int D\phi\,\phi(x_1)\phi(x_2)....\phi(x_n)e^{iS_0+iS_I}}{\int D\phi\, e^{iS_0+iS_I}} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(\langle\phi(x_1)....\phi(x_n)(iS_I)^k\rangle_0\right)_{\text{все диаграммы без вакуумных пузырьков}},\end{aligned} \tag{0.5}$$

то есть это означает, что мы должны раскладывать взаимодействие в ряд тейлора по λ, находить все возможные свертки полученных корреляторов по теореме Вика, но из полученного множества всех Фейнмановских диаграм, мы должны взять только те диаграммы, которые не содержат отдельных кусков (вакуумных пузырьков), которые не связанны с внешними точками $x_1, ..., x_n$. Далее, пользуясь этим следствием, нарисуйте диаграммы Фейнмана и напишите выражения для них до λ^2 включительно для корреляционной функции

$$\langle\phi(x)\phi(y)\rangle. \tag{0.6}$$

Что можно сказать про $\langle\phi(x)\rangle$, $\langle\phi(x)\phi(y)\phi(z)\rangle$ и $\langle\phi(x_1)....\phi(x_{2n+1})\rangle$?

(d). (10 баллов) Нарисуйте диаграммы Фейнмана и напишите выражения для них до λ^2 включительно для корреляционной функции

$$\langle\phi(x)\phi(y)\phi(z)\phi(w)\rangle. \tag{0.7}$$

◯ 2. (50 баллов) Диаграммы Фейнмана для теории ϕ^3

Рассмотрим теперь теорию скалярного поля с взаимодействие $S_I = -\int d^dx\lambda\frac{\phi^3(x)}{3!}$. Проделайте пункты (a)-(d) из Задачи 1.