Листок 9. Диаграммы Фейнмана в координатном пространстве

Решения:

Данный листок предназначен для укрепления навыков в рисовании и нахождении диаграм Фейнмана в координатном пространстве. Интегралы вычислять не надо, нужно только их уметь записать, используя теорему Вика для свободного поля, а также, что

$$\langle\phi(x)\phi(y)\rangle_0 \overset{\text{по определению}}{=} \frac{\int D\phi\,\phi(x)\phi(y)e^{iS_0}}{\int D\phi e^{iS_0}} = G(x-y), \tag{0.1}$$

где $S_0 = \frac{1}{2}\int d^dx(\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - m^2\phi^2)$. Обратите внимание на индекс $\langle....\rangle_0$, который означает, что усреднение идет по свободному полю! Каждый такой пропагатор $G(x-y)$ представляется графически как линия между точками x и y:

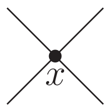
$G(x-y) =$ 

◯ 1. (50 баллов) Диаграммы Фейнмана для теории ϕ^4

Рассмотрим теорию ϕ^4 с взаимодействием $S_I = -\int d^dx\frac{\lambda}{4!}\phi^4(x)$. Если мы хотим найти среднее какого-то числа полей по теории возмущений

$$\langle\phi(x_1)\phi(x_2)....\phi(x_n)\rangle \overset{\text{по определению}}{=} \frac{\int D\phi\,\phi(x_1)\phi(x_2)....\phi(x_n)e^{iS_0+iS_I}}{\int D\phi\,e^{iS_0+iS_I}}, \tag{0.2}$$

мы раскладываем возмущение в ряд Тейлора $e^{iS_I} = e^{-i\int d^4x\frac{\lambda}{4!}\phi^4(x)} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(iS_I)^k}{k!}$, и дальше усредняем все (берем функциональный интеграл) по свободному полю. То есть на деле мы просто применяем уже доказанную нами теорему Вика, то есть находим все возможные попарные свертки полей. Каждый множитель iS_I генерирует на языке диаграмм Фейнмана вершину — узел из которого в теории ϕ^4 торчат 4 отрезка:

$\frac{\lambda}{4!}\phi^4(x) =$ 

Выражение вида $\frac{(iS_I)^k}{k!}$ пропорционально λ^k, и мы говорим о нем, как о k порядке в теории возмущений.

(a). (10 баллов) Начнем с простого рассмотрения вакуумных диаграмм. Рассмотрим функциональный интеграл

$$\int D\phi\,e^{iS_0+iS_I} \tag{0.3}$$

и найдем выражения для диаграмм Фейнмана до второго порядка включительно (λ^2). Имеем

$$\int D\phi\,e^{iS_0+iS_I} = \int D\phi\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(iS_I)^k}{k!}e^{iS_0} \tag{0.4}$$

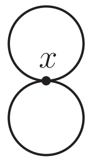
В нулевом порядке по λ получаем просто свободную статсумму

$$\int D\phi\, e^{iS_0} = Z_0. \tag{0.5}$$

В первом пордяке по λ мы имеем

$$\begin{aligned}\int D\phi\,(iS_I)e^{iS_0} = -i\int D\phi\,\int d^dx\frac{\lambda}{4!}\phi^4(x)e^{iS_0} = -\frac{i\lambda}{4!}Z_0\int d^dx\langle\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(x)\rangle_0 = \\ = -\frac{i\lambda}{4!}Z_0\int d^dx 3G^2(0) = -\frac{i\lambda}{8}Z_0G^2(0)\cdot V_d,\end{aligned} \tag{0.6}$$

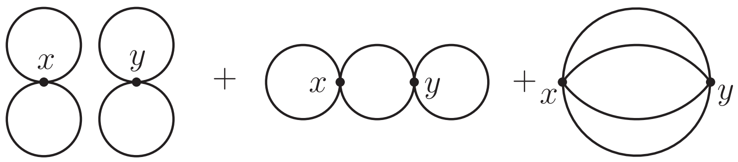
где $V_d = \int d^dx$. В данном случае мы имеем только одну диаграмму вида:



Мы не включаем в выражение для диагрммы множитель Z_0. Во втором порядке мы имеем

$$\begin{aligned}\int D\phi\,\frac{1}{2!}(iS_I)^2e^{iS_0} = -\frac{1}{2!}\int D\phi\,\int d^dx\frac{\lambda}{4!}\phi^4(x)\int d^dy\frac{\lambda}{4!}\phi^4(y)e^{iS_0} = -\frac{\lambda^2}{2!(4!)^2}Z_0\int d^dxd^dy\langle\phi^4(x)\phi^4(y)\rangle_0 = \\ = -\frac{\lambda^2}{2!(4!)^2}Z_0\int d^dxd^dy\big((3G^2(0))^2 + 72G(0)G^2(x-y)G(0) + 4!G^4(x-y)\big) = \\ = \frac{1}{2!}\big(-\frac{i\lambda}{8}\big)^2Z_0G^4(0)\cdot V_d^2 - \frac{\lambda^2}{16}Z_0G^2(0)\int d^dxd^dyG^2(x-y) - \frac{\lambda^2Z_0}{2!(4!)}\int d^dxd^dyG^4(x-y)\end{aligned} \tag{0.7}$$

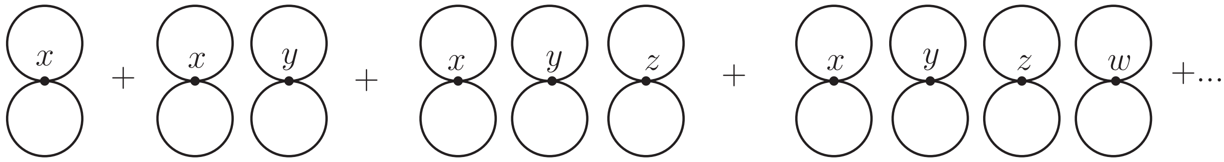
В данном случае мы имеем три диаграммы вида:



(b). (20 баллов) Покажем, что вакуумные диаграммы "экспоненцируются", то есть можно написать

$$\int D\phi\, e^{iS_0+iS_I} = \exp\left(\text{сумма по всем связным вакуумным диаграммам}\right), \tag{0.8}$$

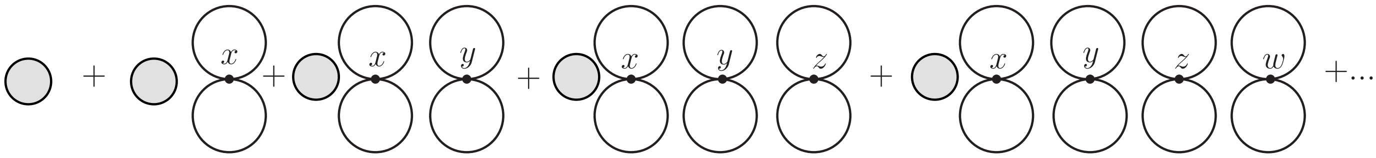
где связными называются диаграммы, которые представляют собой один связный граф. Из предыдущего пункта уже видно, что в разложении возмущения в ряд Тейлора мы можем выделить из бесконечной суммы диаграмм, например, ряд диаграмм вида:



Данный ряд равен

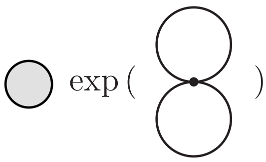
$$
\begin{aligned}
&-\frac{i\lambda}{8}G^2(0)\cdot V_d+\frac{1}{2!}\Big(-\frac{i\lambda}{8}\Big)^2(G^2(0))^2\cdot V_d^2++\frac{1}{3!}\Big(-\frac{i\lambda}{8}\Big)^3(G^2(0))^3\cdot V_d^3+...=\\
&=\exp\left(-\frac{i\lambda}{8}G^2(0)\cdot V_d\right)-1. \qquad (0.9)
\end{aligned}
$$

Далее можно заметить, что $\int D\phi e^{iS_I}e^{iS_0}$ можно представить как следующий ряд



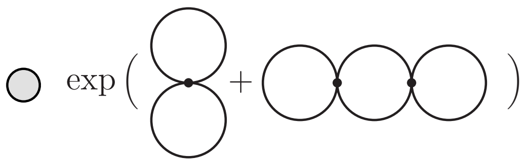
где заштрихованный кружочек означает сумму все остальных диграмм (отличных по структуре, то есть не равных "двум склееным кружочкам"). Как мы видим, выделенные диаграммы могут быть “экспоненциированы”, то есть в итоге мы можем написать:

$$\int D\phi\, e^{iS_I}e^{iS_0} =$$



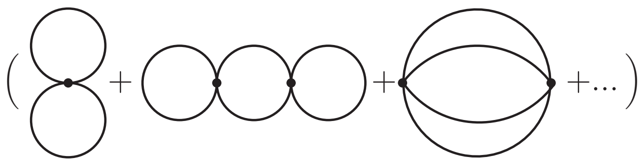
Далее рассуждая алогично, мы можем “экспоненциировать” диаграммы следующего типа и записать

$$\int D\phi\, e^{iS_I}e^{iS_0} =$$



где более маленький заштрихованный кружочек означает сумму все остальных диграмм, отличных уже от тех двух которые стоят в экспоненте. В итоге повторяя процедуру экспоненциирования диаграмм каждого типа, мы получим

$$\int D\phi\, e^{iS_I}e^{iS_0} = Z_0 \exp$$



(c). (10 баллов) Следствием пункта (b) является то, что мы можем написать

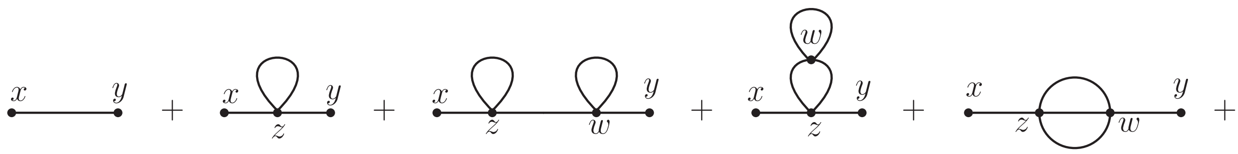
$$\langle\phi(x_1)\phi(x_2)....\phi(x_n)\rangle = \frac{\int D\phi\,\phi(x_1)\phi(x_2)....\phi(x_n)e^{iS_0+iS_I}}{\int D\phi\, e^{iS_0+iS_I}} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\big(\langle\phi(x_1)....\phi(x_n)(iS_I)^k\rangle_0\big)_{\text{все диаграммы без вакуумных пузырьков}}, \qquad (0.10)$$

то есть это означает, что мы должны раскладывать взаимодействие в ряд тейлора по λ, находить все возможные свертки полученных корреляторов по теореме Вика, но из полученного множества всех Фейнмановских диаграм, мы должны взять только те диаграммы, которые не содержат отдельных кусков (вакуумных пузырьков), которые не связанны с внешними точками $x_1, ..., x_n$. Далее, пользуясь этим следствием, нарисуем диаграммы Фейнмана и напишим выражения для них до λ^2 включительно для корреляционной функции $\langle\phi(x)\phi(y)\rangle$. Имеем

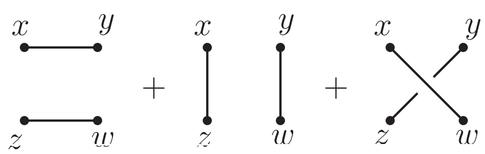
$$\begin{aligned}
\langle\phi(x)\phi(y)\rangle =&\langle\phi(x)\phi(y)\rangle_0 + \frac{(-i\lambda)}{4!}\langle\phi(x)\phi(y)\int d^dz\phi^4(z)\rangle_{0,\text{связ}} + \\
&+ \frac{(-i\lambda)^2}{2!(4!)^2}\langle\phi(x)\phi(y)\int d^dz\phi^4(z)\int d^dw\phi^4(w)\rangle_{0,\text{связ}} + O(\lambda^3) = \\
=&G(x-y) - \frac{i\lambda}{2}\int d^dzG(x-z)G(0)G(z-y) + \\
&+ \left(\frac{-i\lambda}{2}\right)^2\int d^dzd^dwG(x-z)G(0)G(z-w)G(0)G(w-y) - \\
&- \frac{\lambda^2}{4}\int d^dzd^dwG(x-z)G^2(w-z)G(0)G(z-y) - \\
&- \frac{\lambda^2}{6}\int d^dzd^dwG(x-z)G^3(z-w)G(w-y) + O(\lambda^3).
\end{aligned} \qquad (0.11)$$

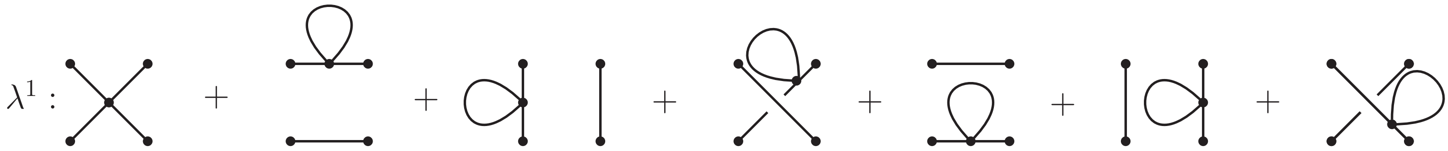
На диаграммном языке мы имеем:

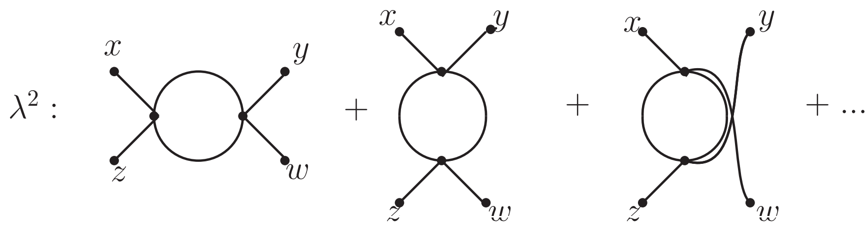
$\langle\phi(x)\phi(y)\rangle =$ 

Коррелятор $\langle\phi(x_1)....\phi(x_{2n+1})\rangle = 0$ в силу симметрии действия: $S[\phi] = S[-\phi]$, также это можно заметить из того факта, что в каждом порядке теории возмущений будет возникать усреднение по свободному полю (по S_0) нечетного числа полей, а такие корреляторы в свободной теории поля равны нулю.

(d). (10 баллов) Нарисуем диаграммы Фейнмана и напишим выражения для них до λ^2 включительно для корреляционной функции $\langle\phi(x)\phi(y)\phi(z)\phi(w)\rangle$. Имеем

$\lambda^0:\ \langle\phi(x)\phi(y)\phi(z)\phi(w)\rangle_0 =$ 





Все остальные диаграммы выглядят как диаграммы первого порядка по λ у которых пропагаторы перенормированны еще одной дополнительной петлей.

◯ 2. (50 баллов) Диаграммы Фейнмана для теории ϕ^3

Рассмотрите теперь теорию скалярного поля с взаимодействие $S_I = -\int d^dx\lambda\frac{\phi^3(x)}{3!}$. Проделайте пункты (a)-(d) из Задачи 1. Данная задача разобрана в параграфе 9 книги Средницкого.