Независимый Московский Университет

Математический анализ 1-й курс, листок 10

8 ноября 2013 года

1. Докажите следующую **теорему Лагранжа**, дающую оценку на степень близости функции своему многочлену Тейлора: если функция непрерывно дифференцируема необходимое число раз на отрезке $[0, x]$, то для некоторой точки $\xi \in [0, x]$ выполняется равенство
$$f(x) = f(0) + \frac{1}{1!}f'(0)x + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n + \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)x^{n+1}.$$

2. Постройте такие бесконечно дифференцируемые функции f на прямой $\mathbb{R}$, что

   $f^{(k)}(0) = 0$ для всех k, но $f(x) \neq 0$ при $x \neq 0$;

   $f(x) \equiv 0$ при $|x| \geqslant 1$, и $f(x) > 0$ при $|x| < 1$;

   $f(x) \equiv 0$ при $x \leqslant -1$, и $f(x) \equiv 1$ при $x \geqslant 1$.

   $f(x) \equiv 0$ при $|x| \geqslant 1$, и $f(x) \equiv 1$ при $|x| \leqslant 1/2$.

3. Для произвольной заданной последовательности чисел $a_0, a_1, \ldots$ постройте бесконечно дифференцируемую функцию f на прямой такую, что $f^{(k)}(0) = a_k$.

4. Докажите, что существуют бесконечно дифференцируемая на всей числовой прямой фукнция $y = f(x)$, удовлетворяющая соотношению
$$x^2y'' + xy' + (x^2 - 1)y = 0$$
(одно из «уравнений Бесселя»), $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, и найдите ее разложение в степенной ряд.
Указание. С нахождения ряда и начните.

5. Найдите разложение в точке $t = 0$ с точностью до $o(t^8)$ решения $x(t)$ «уравнения физического маятника» $\ddot{x} = -\sin x$ с начальными данными $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 1$, и сравните с аналогичным разложением решения «уравнения математического маятника» $\ddot{x} = -x$.

6. Найдите первые 3 ненулевых коэффициента разложения в нуле функции $\operatorname{tg} x$ следующими способами и сравните результаты:

   а) рассматривая частное $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$;

   б) обращая известный ряд для обратной функции $\operatorname{arctg} x$;

   в) при помощи рекуррентной формулы на коэффициенты разложения, вытекающей из дифференциального уравнения $f'(x) = 1 + f(x)^2$ на его решение $f(x) = \operatorname{tg}(x)$.

7. Обозначим через p_n количество «up-down последовательностей», то есть перестановок $k \mapsto a_k$ чисел $1, 2, \ldots, n$, таких что
$$a_1 < a_2 > a_3 < a_4 > \ldots.$$
   а) Докажите рекуррентную формулу для этих чисел с нечетными номерами
$$p_{2r+1} = \sum_{n+k=r-1} C_{2r}^{2n+1} p_{2n+1}p_{2k+1}, \qquad p_1 = 1.$$
   Выведите из нее дифференциальное уравнение $f' = 1 + f^2$ на функцию
   $f(t) = \sum_{r \geqslant 0} p_{2r+1}\frac{x^{2r+1}}{(2r+1)!}$ и получите, окончательно, $f(x) = \operatorname{tg} x$.
   б) Выведите аналогичным образом рекуррентное соотношение на числа p_{2r}, перепишите это соотношение как дифференциальное уравнение на функцию
   $g(x) = 1 + \sum_{r \geqslant 1} p_{2r}\frac{x^{2r}}{(2r)!}$, решите это уравнение и дайте формулу для функции $g(x)$.