Независимый Московский Университет

Математический анализ 1-й курс, листок 11 15 ноября 2013 года

1. а) Пусть $a > 0$. Докажите, что последовательность, заданная формулами $x_1 = 1$, $x_{n+1} = (x_n + (a/x_n))/2$, сходится к $\sqrt{a}$.
   б) Сколько членов этой последовательности нужно взять, чтобы вычислить $\sqrt{3/2}$ с точностью до одной сотой?
   в) Сколько членов ряда Тейлора в нуле для $\sqrt{1+x}$ нужно взять, чтобы вычислить $\sqrt{3/2}$ с той же точностью?

2. Найдите первые 3–4 ненулевых члена разложения функции $y(x)$ в точке $x = 0$, заданной неявно уравнением
   а) $x^3 - x\,y + y^3 = 0$; б) $x^4 - x\,y + y^4 = 0$.

3. Помимо найденных Вами, у обоих пунктов предыдущей задачи имеется еще одно решение вида $y = \sqrt{x} + o(\sqrt{x})$ и $y = \sqrt[3]{x} + o(\sqrt[3]{x})$, соответственно. Найдите еще по 2 ненулевых члена разложения этих решений в начале координат (показатели переменной x в этих разложениях рациональные).

4. Переменные x и y связаны соотношением $y^2 - x^3 + yx^2 + y^3 = 0$.
   а) Найдите из этого соотношения первые 3 ненулевых члена разложения y как функции от x в окрестности начала координат.
   б) Найдите из этого соотношения первые 3 ненулевых члена разложения x как функции от y в окрестности начала координат.

5. Найдите три ненулевых члена асимптотического разложения в нуле для корня $x(p)$ уравнения $x^5 + x = p$.