Независимый Московский Университет
Математический анализ 1-й курс, листок 3
20 сентября 2013 года

1. Для произвольного множества M положим $\rho(x,x)=0$, $\rho(x,y)=1$ при $x\neq y$. Докажите, что определенная таким образом функция является метрикой.

2. Докажите, что следующие функции для пространства $\mathbb{R}^n$ являются метриками:
(а) $\rho_2(x,y)=\sqrt{\sum(x_i-y_i)^2}$ (пространство $\mathbb{R}^n_2$);
(б) $\rho_1(x,y)=\sum|x_i-y_i|$ (пространство $\mathbb{R}^n_1$);
(в) $\rho_\infty(x,y)=\max|x_i-y_i|$ (пространство $\mathbb{R}^n_\infty$);
(г) $\rho_p(x,y)=(\sum|x_i-y_i|^p)^{1/p}$, $p>1$ (пространство $\mathbb{R}^n_p$).
Докажите, что $\lim\limits_{p\to\infty}\rho_p(x,y)=\rho_\infty(x,y)$. Является ли метрикой $\rho_p(x,y)$ при $p<1$?

3. Опишите, как выглядит шар единичного радиуса в $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ относительно каждой из приведенных метрик.

4. На пространстве $\mathbb{N}$ натуральных чисел 10-адическая метрика задается равенством $\rho(a,b)=10^{-k}$, если последние k цифр чисел a и b совпадают. Докажите, что ρ — метрика.

5. Докажите, что на пространстве отрезков $I=[a,b]$ на прямой следующие функции являются метриками:
(а) $\rho([a,b],[c,d])=|a-c|+|b-d|$;
(б) $\rho(I_1,I_2)=|I_1|+|I_2|-2|I_1\cap I_2|$ (где $|I|$ — длина отрезка).

   Определение. Последовательность a_n в метрическом пространстве M с метрикой ρ называется *сходящейся* к точке $a\in M$, если $\forall\varepsilon{>}0\ \exists N\ \forall n{>}N\ \rho(a_n,a){<}\varepsilon$. Последовательность называется *фундаментальной*, если $\forall\varepsilon{>}0\ \exists N\ \forall m,n{>}N\ \rho(a_n,a_m){<}\varepsilon$.

6. Докажите, что всякая сходящаяся последовательность фундаментальна.

   Метрическое пространство *полно*, если всякая фундаментальная последовательность сходится.
Пополнением пространства M называется полное пространство $\widetilde{M}$, если $M\subset\widetilde{M}$ — подпространство, и всякая точка в $\widetilde{M}$ является предельной для M.
Проверьте, являются ли полными следующие пространства. Если нет, определите их пополнения:

7. Пространство $M=\mathbb{R}$ с метрикой $\rho(x,y)=|\operatorname{arctg}x-\operatorname{arctg}y|$.

8. Пространство отрезков на прямой с одной из метрик приведенной выше задачи 5.

9. Сфера $x^2+y^2+z^2=1$ в $\mathbb{R}^3$ с обычным расстоянием.

10. График функции $y=\sin\frac{1}{x}$, рассматриваемый как подмножество плоскости $\mathbb{R}^2$.

11. Докажите, что у каждого пространства существует, и при том, единственное (с точностью до изоморфизма) пополнение.

12. Пространство $\mathbb{Z}_{10}$ 10-адических чисел состоит из формальных бесконечных последовательностей
$$\cdots a_3\,a_2\,a_1\,a_0\ ,\quad a_i\in\{0,1,\dots,9\}\ .$$
Докажите, что $\mathbb{Z}_{10}$ является пополнением пространства $\mathbb{N}$ по 10-адической метрике. Определите сложение, умножение и вычитание в $\mathbb{Z}_p$. (Заметим, что в N вычитание не определено!)

13. Определите пространство $\mathbb{Q}_{10}$ рациональных 10-адических чисел. Всегда ли в нем определено деление на число, отличное от нуля?

Определение. *Окрестностью* точки $x \in M$ называется произвольный открытый шар $U = \{y \in M,\ \rho(x, y) < r\}$. Подмножество $A \subset M$ *открыто*, если всякая точка этого множества содержится в A вместе с некоторой окрестностью.

14. Как выглядит открытое подмножество на прямой $\mathbb{R}$?

15. Открыто ли подмножество в $\mathbb{R}^2$, заданное неравенством $(x^2 + y^2)^2 < x^2 - y^2$?

16. Покажите, что объединение любого семейства открытых подмножеств открыто. Верно ли то же самое для пересечения открытых множеств?

Множество A *замкнуто*, если оно содержит все свои предельные точки.

17. Замкнуто ли пересечение любого семейства замкнутых подмножеств? А объединение?

18. Проверьте, что замкнутый шар в 10-адических числах открыт.

19. Докажите, что A замкнуто тогда и только тогда, когда дополнение к A — открыто.