Независимый Московский Университет

Математический анализ 1-й курс, листок 5

4 октября 2013 года

Множество M называется *счетным*, если существует взаимно однозначное соответствие $M \leftrightarrow \mathbb{N}$ (говорят также, что M имеет мощность $\aleph_0$).

1. Докажите, что следующие множества счетные:
   (а) множество $\mathbb{Q}$ рациональных чисел;
   (б) множество $\mathbb{Q}^n \subset \mathbb{R}^n$ n-ок рациональных чисел;
   (в) множество слов русского языка, т.е. конечных последовательностей
   $$a_1 a_2 \dots\ , \quad a_i \in \{\text{а}, \dots, \text{я}\}\ .$$
2. Докажите, что следующие множества несчетные:
   (а) множество бесконечных последовательностей из нулей и единиц
   $$a_1 a_2 \dots\ , \quad a_i \in \{0, 1\}\ ;$$
   (б) множество бесконечных последовательностей рациональных чисел;
   (в) множество слов русского языка бесконечной длины.
3. Можно ли на плоскости расположить несчетное количество попарно непересекающихся
   (а) кругов;
   (б) восьмерок (фигур вида «∞»);
   (в) букв «$\top$»;
   (г) букв «$\wedge$»?
4. Может ли функция на прямой иметь более чем счетное множество строгих локальных максимумов?

   Говорят, что *множество имеет мощность континуума*, если существует его взаимно однозначное соответствие с множеством $\mathcal{D}^\infty$ бесконечных последовательностей из нулей и единиц.
5. Докажите следующую **теорему Шредера-Бернштейна**: если существуют вложения множеств $A \hookrightarrow B$ и $B \hookrightarrow A$ то существует и взаимно однозначное соответствие $A \leftrightarrow B$.
6. Докажите, что следующие множества имеют мощность континуума:
   (а) отрезок $[0, 1]$;
   (б) множества задачи 2;
   (в) пространство $C[a, b]$ функций, непрерывных на отрезке;
   (г) множество замкнутых подмножеств в $\mathbb{R}$; в $\mathbb{R}^2$.
7. Докажите, что ограниченная функция на отрезке непрерывна тогда и только тогда, когда ее график замкнут.
8. Докажите, что множество точек разрыва монотонной функции не более, чем счетно.
9. Приведите пример функции с разрывами во всех рациональных точках и непрерывную в иррациональных а) какой-нибудь; б) монотонной.

   Пусть $K_1 = [0, 1] \setminus \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$, $K_2 = K_1 \setminus \Big(\left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right) \cup \left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)\Big)$, ... K_{i+1} получается выкидыванием средней трети каждого отрезка, из которых состоит K_i. *Канторовым множеством* называется пересечение $K = \bigcap K_i$.

10. Покажите, что
    (а) K замкнуто и ограниченно;
    (б) точки K находятся во взаимно однозначном соответствии с бесконечными последовательностями, состоящими из нулей и единиц;
    (в) количество точек в K несчетно;
    (г) K не содержит ни одного отрезка ненулевой длины;
    (д) K не может быть представлено как объединение конечного или счетного набора непересекающихся отрезков.

11. Чему равна длина канторова множества? Придумайте (и назовите своим именем) пример множества канторовского типа ненулевой длины.

12. Пусть канторово множество покрыто интервалами. Всегда ли можно выбрать из этого покрытия конечное подпокрытие?

13. Докажите, что множество предельных точек любой последовательности вещественных чисел замкнуто. Более того, всякое замкнутое множество на прямой является множеством предельных точек некоторой последовательности.

14. Всегда ли замкнуто подмножество плоскости, заданное уравнением $f(x, y) = 0$ для некоторой непрерывной функции $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$? Всякое ли замкнутое подмножество плоскости может быть задано таким образом?

15. Какие из следующих свойств непрерывного отображения всегда справедливы? Докажите справедливые утверждения и приведите контрпримеры для ошибочных.
    (а) образ открытого подмножества открыт;
    (б) образ замкнутого подмножества замкнут;
    (в) образ компактного подмножества компактен;
    (г) прообраз компактного подмножества компактен;
    (д) те же утверждения (а-г) для непрерывного отображения *компактных* пространств.

16. Докажите, что метрическое пространство $C[a, b]$ функций, непрерывных на отрезке, полно.

17. Опишите топологию в пространстве (всех) функций на отрезке, в которой сходящимися последовательностями являются поточечно сходящиеся последовательности функций (это т.н. *слабая топология*, или *топология поточечной сходимости*). Замкнуто ли в этой топологии подпространство непрерывных функций?