

Независимый Московский Университет

Математический анализ 1-й курс, листок 7

18 октября 2013 года

Определение (аналитическое). Производной функции f в точке a называется предел $p = f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$, если он существует.

Определение (геометрическое). Производной функции f в точке a называется такое число p , что для функции f в окрестности точки a имеется разложение

$$f(x) = f(a) + p(x - a) + o(x - a).$$

1. Докажите равносильность определений. Докажите, что если функция имеет производную в некоторой точке, то она непрерывна в ней.
2. Вычислите производную $(\operatorname{tg} x)'$; $(\operatorname{arctg})'$.
3. Сколько производных существует у функций $x^{5/2}$; $x^3 \sin(1/x)$, доопределенных в нуле нулем?

4. Под каким углом пересекаются гиперболы $\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ xy = b \end{cases}$?

5. Докажите
 $f' \equiv 0 \Leftrightarrow f = \operatorname{const}$;
 $f' = \operatorname{const} \Leftrightarrow f$ — линейная функция;
 $f^{(N)} \equiv 0$ для некоторого N (в частности, все производные до порядка N определены)
 $\Leftrightarrow f$ — многочлен.

6. Для дифференцирования степенных рядов нужно знать только производную степенной функции $(x^k)'$. Вычислите $(e^x)'$.

7. Дан ряд $f(x) = \sum a_n x^n$ с радиусом сходимости R .
Какой радиус сходимости ряда $\sum n a_n x^{n-1}$?
Докажите, что $f'(x) = \sum n a_n x^{n-1}$ в интервале сходимости.

8. Докажите следующую формулу, выражающую правило дифференцирования композиции, обратной функции, изменение производной при замене координаты:

$$\frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x))g'(x).$$

9. (Алгебраическое определение производной). Зададим на множестве многочленов операцию, сопоставляющую многочлену f от переменной x новый многочлен $\Delta(f)$, при помощи следующих аксиом:

линейность, $\Delta(\lambda f + \mu g) = \lambda \Delta(f) + \mu \Delta(g)$

(λ, μ — числа); *правило Лейбница*, $\Delta(fg) = \Delta(f)g + f\Delta(g)$;

нормировка, $\Delta(x) = 1$.

Докажите,

$\Delta(1) = 0$.

$\Delta(f) = f'$.

Если последнюю аксиому заменить условием $\Delta(x) = p_0$, то $\Delta(f) = f'p_0$.

10. Рассмотрим на множестве многочленов операцию

$$D = \exp\left(\frac{d}{dx}\right) = 1 + \frac{1}{1!} \frac{d}{dx} + \frac{1}{2!} \left(\frac{d}{dx}\right)^2 + \dots$$

Вычислите $D(1)$; $D(x)$; $D(f)$ для произвольного многочлена f .

11. Докажите следующие **теоремы Ролля и Лагранжа**: пусть функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема внутри него. Тогда
- Если $f(a) = f(b)$, то существует точка $x \in [a, b]$, такая что $f'(x) = 0$.
- В общем случае существует точка $x \in [a, b]$, такая что $f'(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.