ЭКЗАМЕН 6–13 ДЕКАБРЯ 2013 Г.

Пожалуйста, напишите на первой странице работы Ваше имя и фамилию в именительном падеже, и более ничего на этой странице не пишите. Также постарайтесь, чтобы на каждой компоненте связности работы было написано Ваше имя. Если в задаче требуется ответ, то начните запись решения с формулировки ответа (даже если в тексте решения потом ответ будет еще раз).

Решения задач нужно сдать в письменном виде до 17.30 13 декабря 2013 г. в учебную часть Независимого университета. Там же после 20 декабря можно будет посмотреть проверенные работы с замечаниями.

Задача 1. Докажите, что для гладкой функции $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ следующие условия эквивалентны: а) для любого $z \in \mathbb{C}$ существует “комплексная производная” $f'(z) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{h\to 0}(f(z+h)-f(z))/h$, б) 1-форма $f(z)\,dz$ замкнута, в) векторные поля $\mathrm{Re}(f(z)\,\frac{\partial}{\partial z})$ и $\mathrm{Im}(f(z)\,\frac{\partial}{\partial z})$ коммутируют между собой. Здесь $dz \stackrel{\text{def}}{=} dx+idy$ и $\frac{\partial}{\partial z} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}$, где x, y — стандартные координаты (действительная часть и мнимая часть) на $\mathbb{C}$.

Задача 2. а) Найдите все интегральные траектории векторного поля A на $S^3 = \{(x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^4 \mid x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$, заданного равенством $A(x) = (-x_1, x_0, -x_3, x_2)$. б) Интегрируемо ли двумерное распределение $\mathcal{D}$ на S^3, где $\mathcal{D}(x) \subset T_xS^3$ порождено векторами $A(x)$ и $B(x) \stackrel{\text{def}}{=} (-x_2, x_3, x_0, -x_1)$?

Задача 3. а) Пусть $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ — гладкая замкнутая кривая в натуральной параметризации, то есть $|\gamma'(t)| = 1$ для всех t, $\gamma(0) = \gamma(1)$ и $\gamma'(0) = \gamma'(1)$, и пусть $B_r = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \exists t \in [0,1]\ |\gamma(t) - x| \le r\}$. Докажите, что при достаточно малых r объем множества B_r равен ar^{n-1}, и найдите константу a. б) Как изменится ответ, если кривая γ гладкая (т.е. $\gamma'(t) \ne 0$ при всех t), но параметризация произвольная? в) Придумайте и докажите аналог утверждения пункта 3б для гладких вложений $\sigma : S^k \to \mathbb{R}^n$. г) Придумайте и докажите аналог утверждения пункта 3б для гладких вложений $\sigma : S^1 \times S^1 \to \mathbb{R}^3$. Сравните результат с утверждением пункта 3в при $n = 3$, $k = 2$.

Задача 4. Существует ли 1-форма α на сфере S^n такая, что $d\alpha(a)$ — невырожденная билинейная форма на пространстве T_aS^n при любом $a \in S^n$?

Задача 5. Верно ли, что у типичного гладкого отображения $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ а) если $\mathrm{Rk}\, f'(a) = 1$, то на $\mathbb{R}^2$ существуют координаты (x_1, x_2) в окрестности $U \ni a$ и (y_1, y_2) в окрестности $V \subset f(U) \ni f(a)$ такие, что $y_1(f(b)) = x_1^2(b)$ и $y_2(f(b)) = x_2(b)$ для всех $b \in f^{-1}(V) \subset U$? (то есть в этих координатах отображение выглядит как $(x_1, x_2) \mapsto (x_1^2, x_2)$) б) множество точек $a \in \mathbb{R}^2$ таких, что $\mathrm{Rk}\, f'(a) = 1$, является гладкой кривой? в) точки a, в которых $f'(a) = 0$, изолированы?