ЛЕКЦИЯ 3

Краткое содержание. Расслоения. Касательное расслоение и алгебра гладких функций.

Пример 1. Два примера расслоений ранга 1 с базой $X = S^1$. Первый пример — тривиальное расслоение: $Y = S^1 \times \mathbb{R}$, $p : Y \to X$ — проекция на первый сомножитель, $U = X$, $\psi : Y = p^{-1}(U) \to \mathbb{R}$ — проекция на второй сомножитель.

Второй пример: $Y = \{(a, \ell) \mid \ell \subset \mathbb{R}^2$— прямая, проходящая через начало координат,$a \in \ell\}$, $X = \mathbb{R}P^1 \approx S^1$, $p(a, \ell) = \ell$. Пусть $\ell_1, \ell_2 \in X$ — оси координат, и пусть $U_1 = X_1 \setminus \{\ell_1\}, U_2 = X_2 \setminus \{\ell_2\}$. Тривиализация в U_1: пусть $\ell \in U_1$, $a = (x, y)$ тогда $\psi_1(a, \ell) \stackrel{\text{def}}{=} y$; для U_2 аналогично. Оператор перехода — умножение на $\operatorname{tg}\varphi$, где φ — угол, образуемый ℓ с осью ℓ_1.

Второй пример представляет собой нетривиальное расслоение, поскольку после выкидывания нулевого сечения от Y остается связное множество $\{(a, \ell) \mid a \neq 0, a \in \ell\} \approx \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, а в случае тривиального расслоения — несвязное.

Пример 2. Пусть $M = G(n, k, \mathbb{R})$ — многообразие Грассмана, $\gamma : \mathbb{R} \to M$ — гладкая кривая. Введем в каждом подпространстве $\gamma(t)$ базис $h_1(t), \dots, h_k(t)$, гладко зависящий от t, и рассмотрим линейное отображение $P_\gamma : a \to \mathbb{R}^n$, заданное равенствами $P_\gamma(h_i(0)) = \dot{h}_i(0)$; здесь точка означает производную по t. Очевидно, базис $h_1(t), \dots, h_k(t)$ не единствен; пусть $\tilde{h}_i(t)$— другой базис в $\gamma(t)$, и $h_i(t) = \sum_{j=1}^k \alpha_{ij}(t)\tilde{h}_j(t)$. Тогда $P_\gamma(h_i(t)) = \sum_{j=1}^k \alpha_{ij}(0)\dot{\tilde{h}}_j(0) + \dot{a}lpha_{ij}(0)\tilde{h}_j(0) = \tilde{P}_\gamma(h_i(0)) + \sum_{j=1}^k \dot{a}lpha_{ij}(0)\tilde{h}_j(0)$. Иными словами, если рассмотреть $Q_\gamma = \Pi_a \circ P_\gamma$, где $\Pi_a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n/a$ — стандартная проекция, получится $Q_\gamma = \tilde{Q}_\gamma$ — этот оператор от выбора базиса в $\gamma(t)$ не зависит.

Пусть, для простоты обозначений, $a \in U_{12\dots k} \subset G(n, k, \mathbb{R})$; тогда в $\gamma(t)$ имеется базис $h_i(t) = e_i + \sum_{j=k+1}^n \xi_{ij}(t)e_j$, и $x_{ij}(t)$ — стандартные координаты $\gamma(t)$ (ср. пример в лекции 1). В этом случае матрица оператора P_γ есть $\dot{\xi}_{ij}(0)$ (базис в a — $h_1(0), \dots, h_k(0)$, базис в $\mathbb{R}^n$ — $e_1, \dots, e_n$). С другой стороны, кривые $\gamma(t) = \langle e_i + \sum_{j=k+1}^n \xi_{ij}(t)e_j\rangle$ и $\tilde{\gamma}(t) = \langle e_i + \sum_{j=k+1}^n \tilde{\xi}_{ij}(t)e_j\rangle$ эквивалентны тогда и только тогда, когда $\tilde{\xi}_{ij}(t) = \xi_{ij}(t) + o(t)$. Отсюда вытекает, что операторы Q_γ для эквивалентных кривых совпадают, и, более того, однозначно определяют класс эквивалентности. Никаких ограничений на коэффициенты $\dot{\xi}_{ij}(0)$ не имеется, откуда вытекает, что построен линейный изоморфизм между касательным пространством $T_aG(n, k, \mathbb{R})$ и множеством линейных операторов $a \to \mathbb{R}^n/a$.

Приведем альтернативное определение касательного функтора на категории гладких многообразий. Вначале определим TM: обозначим $C^\infty(M)$ множество гладких отображений $M \to \mathbb{R}$ (гладких функций). Тогда TM — множество пар (a, ℓ), где $a \in M$, а $\ell : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ — линейный функционал, удовлетворяющий равенству (тождеству Лейбница) $\ell(fg) = f(a)\ell(g) + g(a)\ell(f)$. Отображение $\xi : TM \to M$ — проекция: $\xi(a, \ell) = a$. Множество T_aM функционалов, удовлетворяющих тождеству Лейбница в данной точке a, очевидно, является линейным пространством. Морфизмы: для гладкого отображения $f : M_1 \to M_2$ его производная определяется равенством $f'(a, \ell) \stackrel{\text{def}}{=} (f(a), f^*\ell)$; здесь функционал $f^*\ell : C^\infty(M_2) \to \mathbb{R}$ задается формулой $f^*\ell(\varphi) \stackrel{\text{def}}{=} \ell(\varphi \circ f)$; очевидно, что если $\ell : C^\infty(M_1) \to \mathbb{R}$ удовлетворяет тождеству Лейбница в точке a, то $f^*\ell : C^\infty(M_2) \to \mathbb{R}$ удовлетворяет тождеству Лейбница в точке $f(a)$. Также очевидно, что отображение $f'|_{T_aM_1} : T_aM_1 \to T_{f(a)}M_2$ (переводящее $\ell \mapsto f^*\ell$) линейное, и что $(f \circ g)' = f' \circ g'$.

Доказательство того, что построенный объект (TM, M, ξ) является векторным расслоением, а отображение f' — морфизмом, мы проводить не будем: в конце лекции мы докажем, что построенный здесь функтор эквивалентен функтору лекции 2, для которого все это уже известно.

Для точки $a \in M$ обозначим $\mathfrak{m}_a \stackrel{\text{def}}{=} \{\varphi \in C^\infty(M) \mid \varphi(a) = 0\}$.

Лемма 1. *$\mathfrak{m}_a \subset C^\infty(M)$ является максимальным идеалом. Если многообразие M компактно, то любой максимальный идеал в $C^\infty(M)$ имеет вид $\mathfrak{m}_a$ для некоторой $a \in M$.*

Доказательство. Очевидно, $\mathfrak{m}_a$ — идеал. Пусть теперь $\varphi \notin \mathfrak{m}_a$, то есть $\varphi(a) \neq 0$. Тогда $\varrho(x) \stackrel{\text{def}}{=} 1 - \varphi(x)/\varphi(a) \in \mathfrak{m}_a$, откуда следует, что идеал, порожденный $\mathfrak{m}_a$ и φ, содержит функцию 1 и, следовательно, совпадает со всем кольцом $C^\infty(M)$. Следовательно, идеал $\mathfrak{m}_a$ максимальный.

Пусть теперь M компактно, и $\mathfrak{m}$ — максимальный идеал. Предположим, что функции $\varphi \in \mathfrak{m}$ не имеют общих нулей: для каждой $a \in M$ найдется $\varphi_a \in \mathfrak{m}$ такая, что $\varphi_a(a) \neq 0$. Положим $U_a \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in M \mid \varphi_a(x) \neq 0\}$.

Открытые множества U_a образуют покрытие M; выберем из них конечное подпокрытие $U_{a_1}, \dots, U_{a_N}$. Тогда функция $\psi \stackrel{\text{def}}{=} \varphi_{a_1}^2 + \dots + \varphi_{a_N}^2 \in \mathfrak{m}$ нигде не обращается в нуль; следовательно, $1 = \varphi(x)/\varphi(x) \in \mathfrak{m}$, и идеал $\mathfrak{m}$ тривиален. Таким образом, существует точка $a \in M$ такая, что $\varphi(a) = 0$ для всех $\varphi \in \mathfrak{m}$. Следовательно, $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}_a$; поскольку идеал $\mathfrak{m}$ максимален, $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_a$. $\square$

Пример 3. Если во втором утверждении леммы 1 опустить требование компактности, она станет неверной. Действительно, пусть $I \subset C^\infty(M)$ — функции с компактным носителем (т.е. равные нулю вне некоторого компакта; компакт для каждой функции свой). Очевидно, I — идеал, и $I \neq C^\infty(M)$, поскольку $1 \notin I$. По лемме Цорна существует максимальный идеал $\mathfrak{m} \subset C^\infty(M)$ такой, что $I \subset \mathfrak{m}$. Возьмем произвольную точку $a \in M$ и пусть (U, V, x) — карта, $a \in U$. Для определенности пусть $x(a) = 0$, и пусть V содержит шар радиуса $\varepsilon > 0$ с центром в нуле. Зададим функцию $\varphi : M \to \mathbb{R}$ равенством $\varphi(b) \stackrel{\text{def}}{=} \exp(-1/(\varepsilon - x(b))^2)$ при $b \in U$, $|x(b)| < \varepsilon$, и $\varphi(b) = 0$ при остальных $b \in M$. Очевидно, $\varphi \in I$ и $\varphi(a) \neq 0$. Следовательно, функции из I не имеют общих нулей, откуда $\mathfrak{m} \neq \mathfrak{m}_a$ при всех $a \in M$.

Лемма 2. *Функционал $\ell : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$, удовлетворяющий условию Лейбница в точке $a \in M$, равен нулю на константах и на функциях из $\mathfrak{m}_a^2$.*

Доказательство. Пусть и ℓ удовлетворяет тождеству Лейбница. Тогда $\ell(1) = \ell(1 \cdot 1) = \ell(1) + \ell(1) = 2\ell(1)$, откуда $\ell(1) = 0$.

Если $f \in \mathfrak{m}_a^2$, то, по определению, $f = \sum_{i=1}^N p_i q_i$, где $p_i, q_i \in \mathfrak{m}_a$. Значит, $\ell(f) = \sum_{i=1}^N p_i(a)\ell(q_i) + q_i(a)\ell(p_i) = 0$. $\square$

Следовательно, всякий функционал ℓ, удовлетворяющий тождеству Лейбница в точке a, корректно определяет линейное отображение $\tilde{\ell} : \mathfrak{m}_a/\mathfrak{m}_a^2 \to \mathbb{R}$.

Лемма 3. *Для всякого линейного функционала $\mu : \mathfrak{m}_a/\mathfrak{m}_a^2 \to \mathbb{R}$ существует единственный функционал $\ell : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$, удовлетворяющий тождеству Лейбница в точке a и такой, что $\mu = \tilde{\ell}$.*

Доказательство. Функционал $\mu : \mathfrak{m}_a/\mathfrak{m}_a^2 \to \mathbb{R}$ это функционал $\ell : \mathfrak{m}_a \to \mathbb{R}$, равный нулю на $\mathfrak{m}_a^2$. Очевидно, $C^\infty(M)$ порождено как векторное пространство элементами $\mathfrak{m}_a$ и константами. Продолжим ℓ на все $C^\infty(M)$, положив равным нулю на константах, и докажем, что он будет удовлетворять тождеству Лейбница.

Действительно, $\ell(fg) = \ell((f - f(a))(g - g(a)) + f(a)g + g(a)f - f(a)g(a)) = \ell((f - f(a))(g - g(a))) + f(a)\ell(g) + g(a)\ell(f) + f(a)g(a)\ell(1) = f(a)\ell(g) + g(a)\ell(f)$. $\square$

Иными словами, $T_a M = (\mathfrak{m}_a/\mathfrak{m}_a^2)^*$.

Лемма 4. *Функция $f \in \mathfrak{m}_a(\mathbb{R}^n)$ принадлежит $\mathfrak{m}_a^2$ тогда и только тогда, когда $\frac{\partial f}{\partial s_i}(a) = 0$ для всех $i = 1, \dots, n$. Функционал $\ell : C^\infty(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$, удовлетворяющий тождеству Лейбница, имеет вид $\ell(f) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \frac{\partial f}{\partial y_i}(a)$.*

Доказательство. Без ограничения общности $a = 0$. Пусть $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, и $\varphi(t) = f(ty)$, $t \in \mathbb{R}$. Тогда $f(y) = g(1) = g(0) + \int_0^1 g'(t)\,dt = f(0) + \sum_{i=1}^n y_i \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial y_i}(ty)\,dt$. Если теперь $g_i(s) = \frac{\partial f}{\partial y_i}(tsy)$, то $\frac{\partial f}{\partial y_i}(ty) = g_i(1) = g_i(0) + \int_0^1 g'(s)\,ds = \frac{\partial f}{\partial y_i}(0) + \sum_{j=1}^n y_j \int_0^1 \frac{\partial^2 f}{\partial y_i \partial y_j}(tsy)\,ds$. Следовательно, $f(y) = f(0) + \sum_{i=1}^n y_i \frac{\partial f}{\partial y_i}(0) + \sum_{i=1}^n y_i p_i$, где $p_i = \sum_{j=1}^n y_j \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial^2 f}{\partial y_i \partial y_j}(tsy)\,dsdt$. Первое слагаемое в этой формуле — константа, последнее принадлежит $\mathfrak{m}_a^2$, откуда $\ell(f) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \frac{\partial f}{\partial y_i}(0)$, где $\alpha_i \stackrel{\text{def}}{=} \ell(y_i)$. $\square$

Докажем теперь эквивалентность касательного функтора, построенного выше, и функтора лекции 2. Зададим отображение из TM в смысле лекции 2 в построенное здесь пространство TM: кривой $\gamma : \mathbb{R} \to M$ сопоставим пару $(\gamma(0), \ell_\gamma)$, где ℓ_γ — функционал дифференцирования вдоль кривой: $\ell_\gamma(f) = \left.\frac{df(\gamma(t))}{dt}\right|_{t=0}$. Формула Лейбница для ℓ_γ вытекает из правила дифференцирования произведения: $\ell_\gamma(fg) = f(a)\ell_\gamma(g) + g(a)\ell_\gamma(f)$. Очевидно, эквивалентным кривым соответствуют одинаковые функционалы. Обратное отображение: пусть имеется функционал ℓ и карта (U, V, x), для которой $a \in U$. Рассмотрим кривую γ такую, что $x(\gamma(t)) = x(a) + \ell(x)t$ при достаточно малых t; при остальных t произвольно. Пусть $f \in C^\infty(M)$; по формуле Тейлора при $b \in U$ имеем $f(b) = f(a) + \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i(b) + g(b)$, где $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ — некоторые константы, и $g \in \mathfrak{m}_a^2$. По лемме 2 имеем $\ell(f) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \ell(x_i)$. С другой стороны, $f(\gamma(t)) = f(a) + \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i(\gamma(t)) + o(t) = f(a) + t\sum_{i=1}^n \alpha_i \ell(x_i) + o(t)$, откуда $\ell = \ell_\gamma$.

Доказательство того, что морфизмы f' в обоих определениях совпадают, оставляется читателю в качестве легкого упражнения.