ЛЕКЦИЯ 7–8

Краткое содержание. Дифференциальные формы: дифференцирование и производная Ли.

Гладкое сечение n-й внешней степени кокасательного расслоения T^*M называется дифференциальной n-формой на многообразии M (в частности, сечение самого T^*M называется 1-формой).

Элементы пространства $(T_a^*M)^{\wedge n}$ можно интерпретировать как n-линейные кососимметрические формы на T_aM. Множество $\bigoplus_{n=0}^m (T_a^*M)^{\wedge m}$ является градуированной алгеброй (внешней алгеброй пространства T_a^*M): если $\nu_1 \in (T_a^*M)^{\wedge k}$, $\omega_2 \in (T_a^*M)^{\wedge l}$, то $\omega_1 \wedge \omega_2 \in (T_a^*M)^{\wedge (k+l)}$ определяется формулой

$$(\omega_1 \wedge \omega_2)(v_1, \dots, v_{k+1}) = \sum_{\substack{1 \le i_1 < \dots < i_k \le k+l \\ 1 \le j_1 < \dots < j_l \le k+l \\ i_s \ne j_t \forall s,t}} (-1)^{\#\{(s,t) \mid i_s > j_t\}} \omega_1(v_{i_1}, \dots, v_{i_k}) \omega(v_{j_1}, \dots, v_{j_l}).$$

Лемма 1. *Внешняя алгебра пространства T_aM ассоциативна и супер-коммутативна: $\omega_1 \wedge (\omega_2 \wedge \omega_3) = (\omega_1 \wedge \omega_2) \wedge \omega_3$ для всех $\omega_1, \omega_2, \omega_3$; $\omega_1 \wedge \omega_2 = (-1)^{kl} \omega_2 \wedge \omega_1$ для всех $\omega_1 \in (T_a^*M)^{\wedge k}$, $\omega_2 \in (T_a^*M)^{\wedge l}$.*

Доказательство — упражнение.

Тем самым в множестве $\Omega(M) \stackrel{\text{def}}{=} \bigoplus_{n=0}^m \Omega^n(M)$ всех дифференциальных форм (в т.ч. неоднородных) определена структура модуля над $C^\infty(M)$ (как, впрочем, у гладких сечений любого векторного расслоения над многообразием) и структура ассоциативной супер-коммутативной градуированной алгебры.

Пусть теперь $f : M_1 \to M_2$ — гладкое отображение. Тогда для произвольной n-формы $\omega \in \Omega(M_2)$ определим ее обратный образ $f^*\omega \in \Omega(M_1)$ как n-форму на M_1, заданную формулой $(f^*\omega)(a)(v_1, \dots, v_n) = \omega(f(a))(f'(a)v_1, \dots, f'(a)v_n)$; здесь $a \in M_1$ и $v_1, \dots, v_n \in T_aM_1$.

Пример 1. Для произвольной функции $g \in C^\infty(M)$ можно определить 1-форму dg равенством $(dg)(a)(v) \stackrel{\text{def}}{=} v(g)$; здесь $a \in M$ — произвольная точка и $v \in T_aM$ — произвольный вектор (т.е. функционал $C^\infty(M) \to \mathbb{R}$, удовлетворяющий тождеству Лейбница в точке a). векторное поле. Если в окрестности точки $a \in M$ заданы координаты x, то, как легко проверить, $dg = \sum_{i=1}^m \frac{\partial g}{\partial x_i} dx_i$.

Если $f : M_1 \to M_2$, и $g \in C^\infty(M_2)$, то непосредственно видно, что $f^*dg = d(g \circ f)$; удобо обозначать $g \circ f \stackrel{\text{def}}{=} f^*g$.

Лемма 2. *Соответствие $M \mapsto \Omega(M)$, $f \mapsto f^*$ является контравариантным функтором из категории гладких многообразий в категорию алгебр: $f^*(\omega_1 \wedge \omega_2) = f^*\omega_1 \wedge f^*\omega_2$, $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$.*

Доказательство — прямая проверка.

Пусть $M \subset \mathbb{R}^m$ — открытое множество; обозначим $dx_1(a), \dots, dx_m(a)$ базис в T_a^*M, двойственный к базису $\frac{\partial}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial}{\partial x_m}(a) \in T_aM$. Произвольная n-форма на M выглядит как $\omega = \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_n \le m} \omega_{i_1 \dots i_n}(x) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_n}$. Дифференциалом формы ω называется $(n+1)$-форма $d\omega = \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_n \le m} d\omega_{i_1 \dots i_n}(x) \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_n} = \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_n \le m} \sum_{j=1}^m \frac{\partial \omega_{i_1 \dots i_n}}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_n}$.

Пусть теперь M — произвольное многообразие, $\omega \in \Omega^n(M)$, и (U, V, x) — карта на M в окрестности точки $a \in U$. Тогда дифференциалом формы ω называется форма $d\omega = x^* d((x^{-1})^*\omega)$.

Теорема 1. *1) Определение $d\omega$ корректно, т.е. не зависит от выбора координат (отсюда следует, что $d\omega$ определена на всем M, а не только в карте U).*

2) Отображение d — супер-дифференцирование алгебры форм: $d(\omega_1 \wedge \omega_2) = d\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^k \omega_1 \wedge d\omega_2$ (где $\omega_1 \in \Omega^k(M)$).

3) Отображение $d : \Omega(M) \to \Omega(M)$ — естественное преобразование функтора, описанного в лемме 2: $df^*\omega = f^*d\omega$, где $f : M_1 \to M_2$ — гладкое отображение многообразий.

4) $d^2 = 0$; тем самым $\Omega(M)$ представляет собой комплекс.

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда $M \subset \mathbb{R}^m$ — открытое подмножество, и докажем равенство пункта 2. Пусть $k = 1$. Отображение d линейно и коммутирует с перенумерацией координат, поэтому достаточно проверить равенство для форм $\omega_1 = \nu(x)dx_1$ и $\omega_2 = \varrho(x)dx_{m-l+1} \wedge \dots \wedge dx_m$; это делается непосредственным вычислением (проделайте!). Индукцией по k доказываем дальше, что равенство пункта 2 имеет место для произвольного k и $\omega_1 = f(x)dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k$ (и той же самой ω_2). По линейности заключаем теперь, что равенство пункта 2 имеет место для любых форм в $M \subset \mathbb{R}^m$.

Пусть теперь $M_1 \subset \mathbb{R}^{m_1}$, $M_2 \subset \mathbb{R}^{m_2}$ — открытые множества, x и y — координаты (стандартные) в $\mathbb{R}^{m_1}$ и $\mathbb{R}^{m_2}$, и $f : M_1 \to M_2$ — гладкое отображение. Если ω — 0-форма (т.е. функция на M_2), равенство $f^* d\omega = df^*\omega$ очевидно (ср. пример 1). Теперь если $\omega = \varrho(y) dy_1 \wedge \dots \wedge dy_n$, то $f^*\omega = \varrho(f(x))(f^*dx_1) \wedge \dots \wedge (f^*dx_n)$ (по лемме 2) $= (f^*\varrho)(x)\, d(f^*x_1) \wedge \dots \wedge d(f^*x_n)$ по только что доказанному, откуда следует утверждение пункта 3 для многообразий — открытых подмножеств в $\mathbb{R}^m$.

Пусть, опять-таки, $M \subset \mathbb{R}^m$ открыто. Оператор d линеен и коммутирует с перенумерацией координат; поэтому утверждение пункта 4 достаточно проверить для формы $\omega = f(x)\, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$. В этом случае $dd\omega = \sum_{i,j=1}^m \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dx_i \wedge dx_j \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n = 0$, поскольку члены (i,j) и (j,i) взаимно сокращаются.

Корректность: пусть M — произвольное многообразие, (U_1, V_1, x) и (U_2, V_2, y) — системы координат, $\varphi = x \circ y^{-1} : V_2 \to V_1$ — отображение замены координат. Тогда $d\omega = x^* d((x^{-1})^*\omega) = (\varphi \circ y)^* d((y^{-1} \circ \varphi^{-1})^*\omega) = y^*\varphi^* d((\varphi^{-1})^*(y^{-1})^*\omega) = y^* d((y^{-1})^*\omega)$.

Утверждения пунктов 2, 3 и 4 для произвольных многообразий вытекают из утверждания пункта 1 и уже доказанных утверждения для открытых подмножеств в $\mathbb{R}^m$. □

Пусть X — векторное поле на многообразии M, $a \in U \subset M$ — точка, и U — окрестность a такая, что при $|t| < \varepsilon$ и $a \in U$ определена интегральная траектория $\Phi(a,t)$ поля X; таким образом, определен частичный поток $\Phi_t : U \to M$ и оператор $\Phi_t^* \Omega(M) \to \Omega(U)$. Производная Ли $\mathcal{L}_X : \Omega(M) \to \Omega(M)$ определяется формулой $\mathcal{L}_X(\nu)(a) = \frac{d}{dt} \Phi_t^* \nu(a)\big|_{t=0}$.

Пример 2. Производная 0-формы, т.е. функции $f \in C^\infty(M)$, есть $\mathcal{L}_X(f) = X(f)$.

Дифференциальную n-форму можно интерпретировать как n-линейное над $C^\infty(M)$ кососимметрическое отображение из пространства векторных полей в $C^\infty(M)$: $\omega(X_1, \dots, X_n)(a) \stackrel{\text{def}}{=} \omega(a)(X_1(a), \dots, X_n(a))$, где $a \in M$, $\omega \in \Omega^n(M)$, и $X_1, \dots, X_n$ — векторные поля на M. Обозначим $\iota_X : \Omega^n(M) \to \Omega^{n-1}(M)$ оператор, сопоставляющий n-форме ω форму $\omega(X, \cdot, \dots, \cdot)$ (подстановка поля X в качестве первого аргумента).

Теорема 2. *Производная Ли дифференциальной формы вдоль векторного поля*

1) *коммутирует с дифференциалом:* $\mathcal{L}_X d = d\mathcal{L}_X$*;*
2) *является (четным) дифференцированием (супер-)алгебры* $\Omega(M)$*:* $\mathcal{L}_X(\omega_1 \wedge \omega_2) = \mathcal{L}_X\omega_1 \wedge \omega_2 + \omega_1 \wedge \mathcal{L}_X\omega_2$*, где* $\omega_1 \in \Omega^k(M)$*.*
3) *является гомоморфизмом из алгебры Ли векторных полей в алгебру Ли линейных операторов на* $\Omega(M)$*:* $[\mathcal{L}_X, \mathcal{L}_Y] = \mathcal{L}_{[X,Y]}$*;*
4) *удовлетворяет тождеству* $\mathcal{L}_X = \iota_X d + d\iota_X$ *("волшебное тождество Картана");*
5) *удовлетворяет тождеству* $\mathcal{L}_{fX}\omega = f\mathcal{L}_X\omega + df \wedge \iota_X\omega$*.*

Доказательство. Утверждение 1 вытекает из утверждения 3 теоремы 1, а утверждение 2 — из первого утверждения леммы 2.

Равенство 3, очевидно, выполнено, когда $\omega \in \Omega^0(M) = C^\infty(M)$ (т.е. является функцией на M). Из утверждения 1 вытекает, что равенство 3 также выполнено, когда $\omega = df$ (дифференциал функции). Кроме того, из утверждения 2 вытекает, что если равенство выполнено для форм ω_1 и ω_2, то оно выполнено и для $\omega_1 \wedge \omega_2$. Поскольку равенство локальное, а локально каждая n-форма представляется как внешнее произведение функций и дифференциалов функций, равенство 3 доказано.

Равенство 4 также выполнено для функций: $\mathcal{L}_X f = X(f) = \iota_X df$ согласно примеру 2 и определению дифференциала функции. Также оно выполнено для дифференциала функции: $\mathcal{L}_X df = d\mathcal{L}_X f$ (по пункту 1) $= dX(f) = d\iota_X df = d(\iota_X d + d\iota_X)f$ в силу утверждения 4 теоремы 1. Дальнейшее доказательство — как у утверждения 3.

Равенство 5: очевидно, $\iota_{fX} = f\iota_X$. Отсюда вытекает $\mathcal{L}_{fX}\omega = \iota_{fX} d\omega + d\iota_{fX}\omega = f\iota_X d\omega + d(f\iota_X\omega) = f(\iota_X d\omega + d\iota_X\omega) + df \wedge \iota_X\omega = f\mathcal{L}_X\omega + df \wedge \iota_X\omega$. □

Следующую теорему можно использовать как определение дифференциала формы, не зависящее от координат.

Теорема 3. *Пусть* $\omega \in \Omega^n(M)$*, и* $X_1, \dots, X_{n+1}$ *— векторные поля на* M*. Тогда* $d\omega(X_1, \dots, X_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^i X_i(\omega(X_1, \dots, \widehat{X_i}, \dots X_{n+1})) + \sum_{1 \le i < j \le n+1} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_1, \dots, \widehat{X_i}, \dots, \widehat{X_j}, \dots, X_{n+1})$.

План доказательства теоремы. Теорема очевидна, если $n = 0$ (форма ω — функция на M) и если $\omega = df$ (1-форма — дифференциал функции). Нетрудно убедиться, что если формула выполнена для формы ω, то она выполнена и для формы $f\omega$, где $f \in C^\infty(M)$. Также прямой проверкой можно доказать, что если для $(n-1)$-формы ν формула выполнена, то она выполнена и для n-формы $df \wedge \nu$. Осталось заметить, что формула локальная, а локально любая n-форма представляется в виде $f dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$. □

Пусть теперь V — k-мерное распределение на многообразии M. Символом $\Omega_V \subset \Omega^1(M)$ обозначим множество 1-форм, обнуляющихся на подпространствах $V_a \subset T_a M$: $\nu \in \Omega_V \iff \langle \nu(a), v \rangle = 0 \, \forall a \in M, v \in V_a$.

Теорема 4 (теорема Фробениуса, продолжение). *Следующие условия эквивалентны:*

1) *Распределение V интегрируемо.*
2) *Идеал, порожденный Ω_V в алгебре всех дифференциальных форм, замкнут относительно дифференцирования.*
3) *Для произвольной точки $a \in M$ существует окрестность $U \ni a$ и в ней 1-формы $\nu_1, \dots, \nu_{m-k} \in \Omega_V$ такие, что $d\nu_i = 0$ и $V_b = \{v \in T_b M \mid \langle \nu_1(b), v\rangle = \dots = \langle \nu_{m-k}(b), v\rangle = 0\}$ для любого $b \in U$.*

Доказательство. Пусть распределение V интегрируемо, и N — интегральное многообразие (размерности k), проходящее через точку a. Тогда в некоторой окрестности $U \ni a$ с системой координат $x = (x_1, \dots, x_m)$ подмногообразие N задается уравнениями $x_{k+1} = \dots = x_m = 0$. Отсюда вытекает, что формы $dx_{k+1}, \dots, dx_m$ удовлетворяют условиям пункта 3. Итак, $1 \Longrightarrow 3$.

Пусть теперь $\nu_1, \dots, \nu_{m-k}$ — формы, удовлетворяющие условиям пункта 3. Элемент идеала, порожденного этими формами в алгебре $\Omega(M)$, равен $\omega = \sum_i \alpha_i \wedge \nu_i$, где α_i — какие-то формы (не обязательно однородные). Тогда $d\omega = \sum_i d\alpha_i \wedge \nu_i$, поскольку $d\nu_i = 0$. Тем самым, $d\omega$ принадлежит идеалу, и $3 \Longrightarrow 2$

Пусть теперь выполнено условие 2, и $X, Y \in \mathcal{T}(V)$ — векторные поля, касающиеся распределения V. Пусть $\nu \in \Omega_V$; тогда по теореме 3 $\nu([X,Y]) = d\nu(X,Y) - X\nu(Y) - Y\nu(X)$. В силу условия 2 имеем $d\nu = \sum_i \alpha_i \wedge \nu_i$, где все $\nu_i \in \Omega_V$. Тогда $\nu([X,Y]) = \sum_i \alpha_i(X)\nu_i(Y) - \alpha_i(Y)\nu_i(X) = 0$. Тем самым $[X,Y] \in \mathcal{T}(V)$, и интегрируемость распределения следует из теоремы Фробениуса для векторных полей. □