ЛЕКЦИЯ 9

Краткое содержание. Ориентируемость. Многообразия с краем. Интеграл дифференциальной формы.

Носителем непрерывной функции $f : M \to \mathbb{R}$ называется множество $\operatorname{supp} f \stackrel{\text{def}}{=} \overline{\{x \mid f(x) \neq 0\}}$. Аналогично определяется носитель любого сечения векторного расслоения с базой M — например, дифференциальной формы.

Теорема 1 (о разбиении единицы). *Пусть M — гладкое многообразие, и $U_1, \dots, U_N$ — его конечное покрытие открытыми множествами (т.е. $M = \bigcup_i U_i$). Тогда существуют функции $\varrho_1, \dots, \varrho_N \in C^\infty(M)$ такие, что*

1) $\varrho_i(x) \geq 0$ для всех $x \in M$;
2) $\operatorname{supp} \varrho_i \subset U_i \, \forall i = 1, \dots, N$;
3) $\sum_i \varrho_i(x) = 1$ для всех $x \in M$.

Набор функций ϱ_i называется разбиением единицы, подчиненным покрытию U_i.

Замечание. Если M компактно, то требование конечности покрытия выполнено автоматически (можно оставить только конечное подпокрытие, а функции, соответствующие остальным множествам, положить равными нулю). На самом деле теорема верна без всяких предположений про покрытие, но доказательство ее в этом случае сопряжено с техническими трудностями, и нам она в такой общности не понадобится.

Доказательство теоремы 1 — серия упражнений, см. листок 6.

Атлас на многообразии M называется ориентированным, если для любых двух карт U, V и произвольной точки $a \in U \cap V$ имеет место неравенство $\det \varphi'_{UV}(a) > 0$. Многообразие M называется ориентируемым, если на нем существует ориентированный атлас.

Пример 1. Сфера $S^n = \{(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_0^2 + \dots + x_n^2 = 1\}$ — ориентируемое многообразие. Действительно, определим на ней атлас из двух карт — $U_1 = S^n \setminus \{(1, 0, \dots, 0)\}$ и $U_2 = S^n \setminus \{(-1, 0, \dots, 0)\}$, с координатами $y_1(x_0, \dots, x_n) \stackrel{\text{def}}{=} (x_1, \dots, x_n)/(1 - x_0) \in \mathbb{R}^n$ и $y_2(x_0, \dots, x_n) \stackrel{\text{def}}{=} -(x_1, \dots, x_n)/(1 + x_0) \in \mathbb{R}^n$ соответственно. При $n > 1$ пересечение $U_1 \cap U_2$ линейно связно, так что $\det \varphi'_{12}(a)$ имеет один и тот же знак во всех точках. Изменив, если необходимо, знак координаты $(y_2)_1$, можно добиться, чтобы $\det \varphi'_{12}(a) > 0$. Ориентируемость окружности S^1 проверяется непосредственным вычислением.

Пример 2. Лента Мебиуса $([0, 1] \times (0, 1))/(0, s) \sim (1, 1 - s)$ — неориентируемое многообразие. Действительно, рассмотрим на ней атлас из двух карт, $U_1 = (0, 1) \times (0, 1)$ с координатами $z(x, y) = (x, y)$ (тождественное отображение) и $U_2 = (([0, 1] \setminus \{1/2\}) \times (0, 1))/(0, s) \sim (1, 1 - s)$, где в качестве координат возьмем $w(x, y) = (x, y)$ при $x > 1/2$ и $w(x, y) = (x - 1, 1 - y)$ при $x < 1/2$. Отображение перехода $\varphi_{12}(x, y) = (x, y) \Longrightarrow \det \varphi'_{12}(x, y) = 1 > 0$ при $0 < x < 1/2$ и $\varphi_{12}(x, y) = (x - 1, -y) \Longrightarrow \det \varphi'_{12}(x, y) = -1 < 0$ при $1/2 < x < 1$.

Пусть на M существует ориентированный атлас (W_α, y_α). Назовем точку $a \in U_1$ положительной (относительно U_1), если $a \in W_\alpha \cap U_1$ и $\det \varphi'_{\alpha 1}(y_\alpha(a)) > 0$; поскольку W_α — ориентированный атлас, это понятие не зависит от выбора карты W_α, содержащей a: $\varphi_{\beta 1} = \varphi_{\beta\alpha} \circ \varphi_{\alpha 1}$, откуда $\det \varphi'_{\beta 1} = \det \varphi'_{\beta\alpha} \det \varphi'_{\alpha 1}$, так что знаки $\det \varphi'_{\beta 1}$ и $\det \varphi'_{\alpha 1}$ совпадают. Множество положительных точек открыто (поскольку карты W_α открыты) и замкнуто (поскольку множество отрицательных точек тоже открыто). Карта U_1 связна, поэтому все точки этой карты — либо положительные, либо отрицательные; без ограничения общности предположим первое (иначе можно сменить знак первой координаты на карте U_1).

Точно так же все точки карты U_2 — положительные относительно U_2 (после возможной смены знака первой координаты в U_2. Но определитель производной отображения перехода между картами U_1 и U_2 имеет разный знак при $x < 1/2$ и $x > 1/2$ (и это утверждение не нарушается при смене знака первой координаты в U_1 или U_2. Полученное противоречие доказывет, что лента Мебиуса неориентируема.

Теорема 2. *m-мерное многообразие M ориентируемо тогда и только тогда, когда на нем существует m-форма ω, нигде не обращающаяся в нуль.*

При доказательстве используется разбиение единицы, так что формально теорема будет доказана только для компактных многообразий. Однако поскольку на самом деле разбиение единицы существует в любом случае, теорема также верна без предположения компактности.

Доказательство. Пусть ω — указанная форма; $\{(U_\alpha, V_\alpha, x_\alpha)\}$ — атлас на M; без ограничения общности все U_α линейно связны. m-форма $\nu_\alpha \stackrel{\mathrm{def}}{=} x_\alpha^*(dx_1 \wedge \dots \wedge dx_m)$ пропорциональна ω: $\nu_\alpha = f_\alpha \omega$; при этом f_α не обращается в нуль и, следовательно, сохраняет знак на всем U_α. Без ограничения общности $f_\alpha > 0$ (если нет, то поправим x_α, сменив знак у первой координаты). Пусть теперь $\varphi_{\alpha\beta} = x_\beta \circ x_\alpha^{-1}$ — отображение перехода. Тогда $\varphi_{\alpha\beta}^*(dx_1 \wedge \dots \wedge dx_m) = \det \varphi'_{\alpha\beta}(x) \cdot dx_1 \wedge \dots \wedge dx_m = \frac{f_\beta}{f_\alpha} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_m$, откуда $\det \varphi'_{\alpha\beta}(x) > 0$, и атлас ориентирован.

Обратно: пусть $\{(U_\alpha, V_\alpha, x_\alpha)\}$ — ориентированный атлас на M, и ϱ_α — подчиненное ему разбиение единицы. Определим форму $\omega \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sum_\alpha \varrho_\alpha x_\alpha^*(dx_1 \wedge \dots \wedge dx_m)$ (поскольку $\operatorname{supp} \varrho_\alpha \subset U_\alpha$, определение корректно). В каждой точке $a \in U_{\alpha_1} \cap \dots \cap U_{\alpha_N}$ формы $x_{\alpha_i}^*(dx_1 \wedge \dots \wedge dx_m)$ пропорциональны друг другу с положительным коэффициентом — следовательно, $\omega(a) \neq 0$. □

m-мерным атласом с краем на топологическом пространстве M называется набор троек (U, V, x), где $U \subset M$ открыто, V — либо открытое подмножество в $\mathbb{R}^m$, либо открытое подмножество в $[0, +\infty) \times \mathbb{R}^{m-1}$, и $x : U \to V$ — гомеоморфизм; при этом $\bigcup U = M$ и $x_2 \circ x_1^{-1} : x_1(U_1 \cap U_2) \to x_2(U_1 \cap U_2)$ — гладкое отображение для любых двух карт (U_1, V_1, x_1) и (U_2, V_2, x_2). Эквивалентность атласов определяется так же, как для многообразий. Многообразие с краем — хаусдорфово топологическое пространство со счетной базой, на котором задан класс эквивалентности атласов. Ориентированный атлас и ориентируемое многообразие с краем определяется так же, как для многообразий.

Краем $\partial M \subset M$ называется множество точек $a \in M$ таких, что для некоторой карты (U, V, x), $a \in U$, $V \subset [0, \infty) \times \mathbb{R}^{m-1}$, имеет место равенство $x_1(a) = 0$ (т.е. значение координаты $x(a)$ лежит на границе полупространства $[0, \infty) \times \mathbb{R}^{n-1}$).

Теорема 3. *Если $a \in \partial M$, то для любой карты (U, V, x) такой, что $a \in U$, множество V открыто в $[0, \infty) \times \mathbb{R}^{n-1}$ и $x_1(a) = 0$. Наборы $(U \cap \partial M, p(V), p \circ x)$, где $p : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{m-1}$ — проекция $p(x_1, \dots, x_m) = (x_2, \dots, x_m)$, образуют атлас на ∂M, который тем самым становится гладким $(m-1)$-мерным многообразием (без края!). Если исходный атлас ориентирован, то и полученный атлас на ∂M ориентирован.*

Доказательство. Первое утверждение доказывается топологическими методами; приведем доказательство для тех, кто знаком с понятием гомотопической группы. Пусть (U_1, V_1, x) и (U_2, V_2, y) — карты, и $a \in U_1 \cap U_2$, при этом V_1 открыто в $[0, \infty) \times \mathbb{R}^{m-1}$ и $x_1(a) = 0$, но $y_1(a) \neq 0$ (или, что эквивалентно, V_2 открыто в $\mathbb{R}^m$). Пусть $C \subset V_1$ — открытый полушар с центром в $x(a)$, тогда $C \setminus x(a)$ стягиваемо. Следовательно, стягиваемо и гомеоморфное ему множество $x^{-1}(C) \setminus \{a\} \subset U$; заметим, что оно открыто. Также стягиваем его образ $D \stackrel{\mathrm{def}}{=} y(x^{-1}(C)) \setminus y(a)$. С другой стороны, малая сфера в D с центром в точке $y(a)$ (такая существует, поскольку $y(x^{-1}(C))$ либо открыто в $\mathbb{R}^m$, либо открыто в $[0, \infty) \times \mathbb{R}^{m-1}$, но $y(a)$ не лежит на границе) не стягиваема в $\mathbb{R}^m \setminus \{y(a)\}$ (или в $[0, \infty) \times \mathbb{R}^{m-1} \setminus \{y(a)\}$), поскольку представляет собой образующую группы $\pi_m = \mathbb{Z}$ этого множества. Следовательно, эта сфера не стягиваема и в D, что противоречит стягиваемости D.

Тем самым если карты U_1 и U_2 пересекаются с краем (V_1, V_2 открыты в $[0, \infty) \times \mathbb{R}^{m-1}$), то отображение перехода φ_{12} переводит $V_1 \cap \{0\} \times \mathbb{R}^{m-1}$ в $V_2 \cap \{0\} \times \mathbb{R}^{m-1}$. Отсюда вытекает, что последние $m-1$ координат в картах образуют атлас на ∂M.

Доказательство последнего утверждения — упражнение. □

Мы дадим определение интеграла от m-формы ω с компактным носителем $K = \operatorname{supp} \omega$ по m-мерному ориентированному многообразию M. Доказательство дадим в три этапа.

Этап 1. Пусть $\omega = f(x)\, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_m$ — m-форма на $\mathbb{R}^m$ с компактным носителем $K \stackrel{\mathrm{def}}{=} \operatorname{supp} f$. Положим по определению $\int \omega \stackrel{\mathrm{def}}{=} \int_K f(x)\, dx_1 \dots dx_m$ (в правой части — интеграл Лебега).

Этап 2. Пусть $\omega \in \Omega^m(M)$ — форма с компактным носителем $K \subset U$, где (U, V, x) — карта. Тогда положим по определению $\int_M \omega \stackrel{\mathrm{def}}{=} \int (x^{-1})^* \omega$; заметим, что форма в правой части на $V \subset \mathbb{R}^m$ имеет компактный носитель $x(K)$, так что интеграл определен.

Этап 3. Пусть теперь $\omega \in \Omega^m(M)$ — произвольная форма с компактным носителем K. Рассмотрим покрытие M координатными окрестностями U; выберем конечное множество $U_1, \dots, U_N$, покрывающее K, и пусть $U_0 \stackrel{\mathrm{def}}{=} M \setminus K$. Пусть ϱ_i, $0 \le i \le N$, — разбиение единицы, подчиненное покрытию $U_0, \dots, U_N$. Тогда положим по определению $\int_M \omega \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sum_{i=1}^N \int \varrho_i \omega$; поскольку $\operatorname{supp} \varrho_i \omega \subset \operatorname{supp} \varrho_i \subset U_i$, интеграл в правой части уже был определен.

Теорема 4. *Определение интеграла формы корректно, т.е. не зависит от выбора координат и разбиения единицы.*

Доказательство. Пусть $\alpha : \tilde{V} \to V$ — диффеоморфизм открытых подмножеств в $\mathbb{R}^m$ или $[0, \infty) \times \mathbb{R}^{m-1}$, для которого $\det \alpha'(a) > 0$ при всех $a \in \tilde{V}$. Пусть $\omega = f(x)\, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_m$ — m-форма на V. Согласно формуле замены координат в интеграле Лебега, $\int_{\tilde{V}} \alpha^* \omega = \int_{\tilde{V}} f(\alpha(x)) \det \alpha'(x)\, dx_1 \dots dx_m = \int_V f(x)\, dx_1 \dots dx_m = \int_V \omega$.

Пусть $y : U \to \tilde{V} \subset \mathbb{R}^m$ — другие координаты в карте U, и $\varphi = x \circ y^{-1} : \tilde{V} \to V$ — отображение перехода. Тогда $(y^{-1})^* \omega = (\varphi^{-1} \circ x^{-1})^* \omega = (\varphi^{-1})^* (x^{-1})^* \omega$. Поскольку многообразие ориентировано, $\int_{\tilde{V}} (y^{-1})^* \omega = \int_V (x^{-1})^* \omega$, так что $\int_U \omega$ от выбора координат не зависит.

Пусть $U_0, U_1, \dots, U_M$ и $U_0, \tilde{U}_1, \dots, \tilde{U}_L$ — покрытия M координатными окрестностями, где $U_0 \stackrel{\text{def}}{=} M \setminus \operatorname{supp} \omega$, и ϱ_i, $\tilde{\varrho}_j$ — соответствующие разбиения единицы. Тогда $\sum_i \int_{U_i} \varrho_i \omega = \sum_i \sum_j \tilde{\varrho}_j \int_{U_i} \varrho_i \omega = \sum_{i,j} \int_{U_i \cap \tilde{U}_j} \varrho_i \tilde{\varrho}_j \omega = \sum_j \int_{\tilde{U}_j} \tilde{\varrho}_j \omega$. $\square$