ЛЕКЦИИ 11 И 12

Краткое содержание. Теорема Тома о трансверсальности.

Пример 1. Пусть M — гладкое многообразие и $f \in C^\infty(M)$. Точка $a \in M$ называется невырожденной критической точкой функции f, если $f'(a) = 0$ и для некоторой системы координат (U, V, x), $a \in U$, матрица $Q_{a,x}(f)$ вторых производных функции $f \circ x^{-1} : V \to \mathbb{R}$ в точке $x(a) \in V$ невырождена. Функция f называется функцией Морса, если все ее критические точки невырождены. Нетрудно видеть, что если y — другая система координат в окрестности a, и $\varphi = x \circ y^{-1}$ — отображение перехода, то $Q_{a,y}(f) = B^* Q_{a,x}(f) B$, где $B = \varphi'(y(a))$. Отсюда видно, что понятие невырожденной точки не зависит от выбора координат; более того, от выбора координат не зависит сигнатура (количество отрицательных квадратов) квадратичной формы $h \mapsto h^* Q_{a,x}(f) h$, где $h \in \mathbb{R}^m$.

Пусть теперь M двумерно и f — функция Морса. Тогда $Q_{a,x}(f)$ — симметрическая матрица 2×2, и все критические точки f делятся на три класса: точки a, где $Q_{a,x}(f)$ положительно определена, отрицательно определена и имеет сигнатуру $(1,1)$. Из формулы Тейлора следует, что первые точки — точки локального минимума, вторые — локального максимума; точки третьего типа называются седловыми. Обозначим количество локальных минимумов, седловых точек и локальных максимумов функции Морса f символами $n_0(f)$, $n_1(f)$ и $n_2(f)$.

Теорема 1. *Если M — компактное двумерное многообразие, то величина $\chi(f) \stackrel{def}{=} n_0(f) - n_1(f) + n_2(f)$ одинакова для всех функций Морса $f \in C^\infty(M)$.*

Почти доказательство. Пусть $f_0, f_1 \in C^\infty(M)$ — функции Морса; включим их в семейство функций $f_s \in C^\infty(M)$, $0 \le s \le 1$. (Такое семейство заведомо существует, например, $f_s = s f_1 + (1-s) f_0$.) Малым шевелением семейства f_s можно добиться, чтобы f_s при всех $s \in [0,1]$, кроме конечного набора $s_1, \dots, s_N$ "катастрофических" значений, были функциями Морса. При "катастрофических" значениях параметра s поведение такое: для каждого $i = 1, \dots, N$ функция f_{s_i} имеет ровно одну критическую точку a_i и существует $\varepsilon > 0$ такое, что при $s_i < s < s_i + \varepsilon$ функция f_s имеет вблизи a_i две критических точки — минимум и седло или максимум и седло — а при $s_i - \varepsilon < s < s_i$ функция f_s вблизи a_i критических точек не имеет. (Или наоборот — противоположные знаки неравенств.)

Поскольку M компактно, при $s_i < s < s_{i+1}$ величины $n_0(f_s), n_1(f_s), n_2(f_s)$ не меняются (почему?). Из приведенного описания вытекает, что величина $\chi(f) = n_0(f) - n_1(f) + n_2(f)$ не меняется также в окрестности точки s_i — следовательно, она вообще не зависит от s. Таким образом, $\chi(f_0) = \chi(f_1)$, так что теорема почти доказана — нужно только обосновать существование семейства f_s с нужными свойствами. $\square$

Подпространства $V_1, V_2 \subset V$ конечномерного векторного пространства V называются трансверсальными, если $V_1 + V_2 = V$ (при этом сумма не обязательно прямая, возможно $\dim(V_1 \cap V_2) > 0$!). Подмногооображия $S_1, S_2 \subset M$ многообразия M трансверсальны, если для каждой точки $x \in S_1 \cap S_2$ подпространства $T_x S_1$ и $T_x S_2$ в пространстве $T_x M$ трансверсальны. Гладкое отображение $f : N \to M$ трансверсально к подмногообразию $S \subset M$, если для всякого $x \in f^{-1}(S)$ подпространства $T_{f(x)} S$ и $f'(x) T_x N$ в пространстве $T_{f(x)} M$ трансверсальны.

Пример 2. Отображение $f : N \to M$ трансверсально к точке $a \in M$, если a не принадлежит образу $f(N) \subset M$ или $\dim N \ge \dim M$ и a является регулярным значением f.

Пример 3. Отображение $f : S^1 \to \mathbb{R}^3$ трансверсально к кривой $S \subset \mathbb{R}^3$, если $f(S^1) \cap S = \varnothing$.

Подмножество топологического пространства называется массивным, если оно является пересечением счетного числа открытых всюду плотных множеств.

Пример 4. Множество $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ массивно в $\mathbb{R}$, поскольку $\mathbb{Q}$ счетно. Из этого примера вытекает, что массивное множество не обязано быть открытым.

Пример 5. Любое подмножество в $\mathbb{Q}$ (с топологией, индуцированной из $\mathbb{R}$) является массивным. Из этого примера вытекает, что в произвольном топологическом пространстве массивное множество не обязано быть всюду плотным и даже непустым.

Теорема 2 (Бэра). *Массивное подмножество полного метрического пространства всюду плотно.*

Доказательство. Пусть M — полное метрическое пространство, $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$, где $A_n \subset M$ открыты и всюду плотны, и $U \subset M$ открыто. Пересечение $U \cap A_1$ непусто и открыто, поэтому существует замкнутый шар $B_1 \subset U \cap A_1$ радиуса $r_1 \leq 1$ и открытый шар $U_1 \subset B_1 \subset A_1$. Пересечение $U_1 \cap A_2 \subset U \cap A_1 \cap A_2$ непусто и открыто, так что содержит замкнутый шар B_1 радиуса $r_2 < 1/2$ и открытый шар $U_2 \subset B_2$. Продолжая процесс, получим семейство вложенных шаров $B_1 \supset B_2 \supset \dots$, радиусы которых $r_n \to 0$ при $n \to \infty$ и $B_n \subset U \cap A_1 \cap \dots \cap A_n$. Поскольку M — полное метрическое пространство, существует точка $b \in \bigcap_n B_n$. Но тогда $b \in U \cap \bigcap_n A_n$. Следовательно, U пересекается с A; в силу произвольности U это означает, что A всюду плотно (и, в частности, непусто — во многих приложениях теоремы Бэра используется только это!). $\square$

Если множество точек топологического пространства, обладающих каким-нибудь свойством, массивно, то говорят также, что свойство выполнено для точки общего положения.

Теорема 3 (лемма Сарда, она же лемма Брауна, лемма Тома и др.). *Пусть M — многообразие с краем (возможно, пустым). Гладкая функция $f : M \to \mathbb{R}$ трансверсальна к точке общего положения $a \in \mathbb{R}$.*

Доказательство. Многообразие M — объединение не более чем счетного числа карт, диффеоморфных шарам в $\mathbb{R}^m$. Пересечение не более чем счетного числа массивных множеств массивно, поэтому достаточно доказать теорему для случая, когда $M \subset \mathbb{R}^m$ — замкнутый шар.

Пусть $A_k \subset M$, $k = 1, \dots, m-1$, — множество точек, в которых все частные производные m до k-го порядка включительно равны нулю, но существует частная производная порядка $k+1$, отличная от нуля; также пусть A_m — множество точек, в которых равны нулю все производные до порядка m включительно. Всего $A = A_1 \cup \dots \cup A_m$ — множество критических точек f. Докажем, что множества $\mathbb{R} \setminus f(A_k)$ для всех $k = 1, \dots, m$ массивны; отсюда вытекает, что $\mathbb{R} \setminus f(A)$ массивно, что и утверждает теорема.

Пусть $x \in A_k$, $1 \leq k \leq m-1$. Тогда существует мультииндекс $I = (i_1, \dots, i_k, i_{k+1})$ такой, что $\frac{\partial^{k+1} f(x)}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_{k+1}}} \neq 0$. Положим $h(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial^k f(x)}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}$, и $B_{I,\varepsilon} \stackrel{\text{def}}{=} \{y \in M \mid |y - x| < \varepsilon, h_i(y) = 0\}$. Согласно теореме о неявной функции $B_{I,\varepsilon} \subset M$ — подмногообразие (размерности $m-1$). Критическая точка функции f остается критической при ограничении на $B_{I,\varepsilon}$. Индукция по размерности позволяет считать, что для $B_{I,\varepsilon}$ теорема доказана, так что $\mathbb{R} \setminus f(A \cap B_{I,\varepsilon})$ массивно. Множество A_k покрыто не более чем счетным объединением множеств $B_{I,\varepsilon}$, откуда вытекает, что $\mathbb{R} \setminus f(A_k)$ также массивно.

Множество $A_m \subset M$ замкнуто; поскольку M компактно (шар), то A_m также компактно. Следовательно, $f(A_m)$ замкнуто, а $\mathbb{R} \setminus f(A_m)$ открыто. Докажем, что оно также всюду плотно (и, следовательно, массивно). Для этого покроем M шарами радиуса ε; количество этих шаров $O(\varepsilon^{-m})$ (при $\varepsilon \to 0$). По формуле Тейлора образ под действием f каждого шара, пересекающегося с A_m, является интервалом длины $o(\varepsilon^m)$; следовательно, образ $f(A_m)$ можно покрыть интервалами общей длиной $O(\varepsilon^{-m}) \cdot o(\varepsilon^m) = o(1)$, т.е. произвольно малой. Отсюда вытекает, что $f(A_m)$ не содержит ни одного интервала, т.е. $\mathbb{R} \setminus f(A_m)$ всюду плотно. $\square$

Следствие 1. *Пусть $S \subset M \times \mathbb{R}^d$ — подмногообразие. Тогда оно трансверсально к подмногообразию $M \times \{a\}$ для точки a общего положения.*

Доказательство. Пусть $p : M \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ — проекция. Очевидно, подмногообразие S трансверсально $M \times \{a\}$ тогда и только тогда, когда ограничение $p|_S$ трансверсально $\{a\}$. Тем самым следствие для $d = 1$ вытекает из леммы Сарда.

Для произвольного d достаточно, как и в лемме Сарда, рассмотреть случай, когда $M \subset \mathbb{R}^m$ — шар и S компактно; множество A критических точек $p|_S$ замкнуто и, следовательно, тоже компактно. Тем самым $f(A)$ замкнуто, а $\mathbb{R}^d \setminus f(A)$ открыто.

Для доказательства того, что $\mathbb{R}^d \setminus f(A)$ всюду плотно, проведем индукцию по d. По лемме Сарда S трансверсально к $M \times \mathbb{R}^{d-1} \times \{x\}$ для $x \in \mathbb{R}$ общего положения. Пересечение $S_x = S \cap M \times \mathbb{R}^{d-1} \times \{x\}$ — многообразие размерности $\dim S - 1$; по предположению индукции оно трансверсально к $M \times \{y\} \times \{x\}$ для $y \in \mathbb{R}^{d-1}$ общего положения; по лемме Бэра множество таких x и таких y плотно. Тогда S трансверсально к $M \times \{(y, x)\}$. Следовательно, множество таких a, что S трансверсально к $M \times \{a\}$, всюду плотно. $\square$

Следующая лемма нам понадобится в дальнейшем:

Лемма 1. *Для произвольного векторного подпространства $V \subset \mathbb{R}^n$ аффинное отображение $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ (т.е. отображение вида $f(x) = Ax + b$, где $A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ — линейный оператор) общего положения трансверсально к V.*

Доказательство. Пусть $k = \dim V$; рассмотрим два случая.

$m + k \geq n$ Докажем прежде всего, что множество линейных операторов $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ максимального ранга открыто и всюду плотно. Действительно, множество операторов не максимального ранга задается системой полиномиальных уравнений (равенство нулю миноров) на элементы матрицы A; следовательно, оно замкнуто. С другой стороны, пусть I — единичная матрица ($m \times m$ или $n \times n$, в зависимости от того, что меньше), к которой приписано нужное количество нулевых строк или столбцов. Тогда существует сколь угодно малое $\varepsilon > 0$ такое, что $A + \varepsilon I$ имеет максимальный ранг.

Если $m \geq n$, то теорема уже доказана. В противном случае заметим, что подпространство W не трансверсально V, если $\dim W \cap V > (m+k) - n$. Пусть $W_n \to W$ в грассманиане $G(m, \mathbb{R}^n)$; тогда имеется последовательность $P_n \in G(m+k-n+1, \mathbb{R}^n)$ такая, что $P_n \subset W_n \cap V$. Поскольку $G(m+k-n, \mathbb{R}^n)$ компакт, без ограничения общности можно считать, что $P_n \to P$; но тогда $P \subset W \cap V$, так что W не трансверсально к V. Таким образом, множество подпространств, трансверсальных к V, открыто. Доказательство всюду плотности этого множества — упражнение. Если $A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ — линейный оператор полного ранга, образ которого трансверсален V, то аффинное отображение $x \mapsto Ax + b$ трансверсально V при любом b. Тем самым в случае $m + k \geq n$ лемма доказана.

$m + k < n$ В этом случае можно взять произвольное A, а $b \in \mathbb{R}^n \setminus V \oplus A(\mathbb{R}^m)$ (множество таких b открыто и всюду плотно) — в этом случае образ аффинного отображения $x \mapsto Ax + b$ не пересекается с V. □

Пусть B и M — многообразия, и $p : M \to B$ — гладкое локально тривиальное расслоение. Обозначим $\Gamma_M(U)$ множество гладких сечений расслоения, определенных на множестве U. Два сечения σ_1, σ_2 называются r-эквивалентными в точке $b \in B$, если $\sigma_1(b) = \sigma_2(b) \stackrel{\text{def}}{=} a \in M$, и для некоторых (и, следовательно, всяких) систем координат x на B в окрестности точки b и y на M в окрестности точки a имеет место равенство $y(\sigma_1(c)) - y(\sigma_2(c)) = o((x(c) - x(b))^r)$ при $b \to c$. Символом $J_b^r M$ обозначается множество классов r-эквивалентности сечений, определенных в окрестности U точки $b \in B$. Класс эквивалентности, содержащий сечение σ, называется r-струей σ в точке b и обозначается $J^r\sigma(b)$.

Пример 6. Пусть $M = B \times \mathbb{R}$, $p : M \to B$ — проекция (тривиальное векторное расслоение ранга 1). Гладкое сечение σ этого расслоения это отображение $\sigma : B \to B \times \mathbb{R}$ вида $\sigma(c) = (c, f(c))$, где $f : B \to \mathbb{R}$ — гладкая функция. Как нетрудно видеть, сечения $c \mapsto (c, f(c))$ и $c \mapsto (c, g(c))$ r-эквивалентны в точке $b \in B$, если функции f и g имеют в точке b одинаковые многочлены Тейлора порядка r (в каких нибудь координатах — а, следовательно, в любых). Таким образом, $J_b^r M$ — пространство многочленов степени не выше r от $m = \dim B$ переменных. Если $M = B \times \mathbb{R}^n$, то аналогично устанавливается, что $J_b^r M$ — пространство векторфункций $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, каждая компонента которых — многочлен степени не выше r. В общем случае если слой $p : M \to B$ — гладкое многообразие размерности n, то пространство $J_b^r M$ можно тоже отождествить с полиномиальными отображениями $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ степени не выше r, если в окрестностях точек $b \in B$ и $a \in p^{-1}(b) \subset M$ введены коорднаты.

В примере 6 видно, что в случае тривиального векторного расслоения можно объединить пространства $J_b^r M$ для разных точек b в единое пространство r-струй $J^r M$, из которого имеется естественное отображение $J^r p : J^r M \to M$, переводящее все струи в точке b в саму точку b. На пространстве $J^r M$ можно ввести структуру многообразия аналогично тому, как вводится структура многообразия на TM при "геометрическом" его определении (как множества классов эквивалентности кривых); отображение $J^r p$ будет тогда гладким расслоением. Мы не будем приводить детали этой конструкции, т.к. будем пользоваться ею только при $r = 1$.

Пример 7. Пусть $r = 1$ и $p : M \to B$ — гладкое расслоение. Сечение расслоения это гладкое отображение $\sigma : B \to M$, удовлетворяющее равенству $p \circ \sigma = \mathrm{id}_M$. Тем самым производная $\sigma'(b) : T_b B \to T_{\sigma(b)} M$ удовлетворяет равенству $p'(\sigma(b))\sigma'(b) = \mathrm{id}_{T_b B}$. Нетрудно видеть, что два сечения 1-эквивалентны в точке b, если у них совпадают в точке b значения и производные. Тем самым $J_b^1 M$ это пространство пар (b, A), где $A : T_b B \to T_{\sigma(b)} M$ — линейный оператор, для которого $p'(\sigma(b))A = \mathrm{id}_{T_b B}$. Их можно объединить в единое расслоение следующим образом: рассмотрим вспомогательное расслоение $Y = p^* T^* B \times TM$ над M. Его слой над точкой $a \in M$ это $T^*_{p(a)} B \otimes T_a M$, т.е. множество линейных отображений $T_{p(a)} B \to T_a M$. Рассмотрим в нем подрасслоение Y', слой которого состоит из операторов A, удовлетворяющих приведенному выше условию. Это подрасслоение — не векторное, а аффинное (слой выделяется линейным неоднородным уравнением). Теперь "спроектируем" это расслоение на B, рассмотрев расслоение Y'', слой которого над точкой b — дизъюнктное объединение слоев расслоения Y' над точками $a \in p^{-1}(b)$ (продумайте, какая точно топология вводится в пространстве Y'', и почему это расслоение). Расслоение 1-струй $J^1 M$ теперь это прямое произведение $M \times Y''$.

Введем на пространстве $\Gamma(M)$ сечений расслоения $p : M \to B$ топологию (называемую компактно-открытой), предбазу которой составляют множества $C(K, U)$. Здесь $K \subset B$ — компакт такой, что расслоение p тривиально над ним; $U \subset M$ — открытое множество, и $C(K, U) = \{\sigma \in \Gamma(M) \mid \forall a \in K\, \sigma(a) \in U\}$. Базой топологии будет множество конечных пересечений элементов предбазы; топологией — множество всевозможных объединений элементов базы.

Компактно-открытой C^r-топологией в пространстве гладких сечений расслоения $p : M \to B$ называется компактно-открытая топология в пространстве их r-струй: множество $U \subset \Gamma(M)$ открыто, если множество $J^r(U) \subset \Gamma(J^r M)$ открыто в компактно-открытой топологии.

Теорема 4 (Тома о трансверсальности)**.** *Для произвольного подмногообразия $S \subset J^r M$ множество сечений $\sigma \in \Gamma(M)$ расслоения $p: M \to B$, 1-струя которых трансверсальна к S, массивно в компактно-открытой C^1-топологии.*

Набросок доказательства. Любое многообразие можно представить в виде счетного объединения компактов, диффеоморфных шару; так что достаточно разобрать случай, когда S — такой шар, и $J^r p(S) \subset B$ таково, что расслоение $J^r p : J^r M \to B$ над ним тривиально. Поэтому мы можем использовать координатное описание пространства $J^r M$, данное в примере 6.

Дальнейшее доказательство проводится совершенно одинаково для всех r; мы приведем его для $r = 0$ (т.е. сечений, трансверсальных к подмногообразию $S \subset M$ исходного расслоения), а восстановление деталей при прочих r — упражнение.

Сечение σ трансверсально к S, если для каждого $a \in S$ аффинное отображение $v \mapsto \sigma(a) + \sigma'(a)v$, где $v \in T_a B$, трансверсально к $T_{\sigma(a)} S \subset T_{\sigma(a)} M$. Согласно лемме 1 и определению компактно-открытой топологии, множество сечений, трансверсальных к S, открыто.

Для доказательства всюду плотности рассмотрим сечение $\sigma_0 \in \Gamma(M)$. Зафиксируем координаты на многообразии B в множестве $p(S)$ и на многообразии M в окрестности $\sigma_0(b)$. Теперь из следствия 1 вытекает (уточните, как!) всюду плотность в тривиальном расслоении над $p(S) \subset B$. В то же время с помощью разбиения единицы можно продолжить сечение, заданное над $p(S)$, до сечения на всем B (как именно продолжить, неважно, т.к. на его трансверсальность к S это не влияет). $\square$