

## 1. МНОГООБРАЗИЯ.

**Задача 1.** Докажите, что линейно связное одномерное многообразие диффеоморфно либо  $\mathbb{R}^1$ , либо  $S^1$ .

**Задача 2.** Выпишите явно карты, координаты и функции перехода в грассманиане  $G(2, 4, \mathbb{R})$ .

**Задача 3.** Найдите критические точки и критические значения функции  $f : \mathbb{R}P^n \rightarrow \mathbb{R}$ , заданной формулой  $f([x_0 : \dots : x_n]) = (x_0^2 + 2x_1^2 + \dots + (n+1)x_n^2)/(x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2)$ .

**Задача 4.** Пусть  $T \subset \mathbb{R}^3$  — стандартно вложенный тор (поверхность вращения окружности вокруг оси, лежащей в ее плоскости и ее не пересекающей). отображение  $G : T \rightarrow S^2$  сопоставляет точке  $a \in T$  единичный вектор внешней нормали к поверхности. Найдите критические точки отображения  $G$ .

**Задача 5.** а) При каких  $a \in \mathbb{R}$  подмножество  $E = \{[x : y : z] \in \mathbb{R}P^2 \mid y^2z = x^3 + axz^2\}$  является гладким подмногообразием? б) Приведите пример хотя бы одного атласа на нем (при каждом допустимом  $a$ ). в) Аналогичный вопрос, если все числа комплексные ( $[x : y : z] \in \mathbb{C}P^2$ ,  $a \in \mathbb{C}$ ; речь идет о двух структурах — двумерного гладкого подмногообразия и одномерного комплексного подмногообразия). г) отображение  $G : E \rightarrow \mathbb{C}P^1$  сопоставляет точке  $u \in E$  (в комплексном случае) касательную прямую к комплексному подмногообразию  $E$  в этой точке. Найдите критические точки отображения  $G$ .