2. ПОДМНОГООБРАЗИЯ, РАССЛОЕНИЯ, КАСАТЕЛЬНОЕ РАССЛОЕНИЕ.

Гладким вложением многообразия N в многообразие M (размерности $n \leq m$) называется иммерсия $f : N \to M$, при которой различные точки переходят в различные.

Задача 1. Докажите или опровергните следующие утверждения: а) если $f : N \to M$ — гладкое вложение, а образ $f(N) \subset M$ локально замкнут, то он является подмногообразием и диффеоморфен N; б) если $f : N \to M$ — гладкое вложение, а N компактно, то образ $f(N) \subset M$ — подмногообразие, диффеоморфное N.

Задача 2. Пусть M — многообразие размерности m, $N \subset M$ — подмножество (с индуцированной топологией), на котором имеется структура n-мерного многообразия ($n \leq m$) такая, что отображение вложения $\iota : N \to M$ (при которой каждой точке N сопоставляется она сама, но как точка M) является иммерсией. Обязательно ли N — подмногообразие? Может ли на одном и том же подмножестве $N \subset M$ существовать две различных структуры n-мерного многообразия с этим свойством?

Задача 3. Векторное расслоение $\xi : Y \to X$ называется тривиальным, если существует его тривиализация, определенная над всей базой X. Пусть G — группа Ли, то есть многообразие, наделенное структурой группы, в которой операции умножения (на фиксированный элемент) и взятия обратного — гладкие. а) Докажите, что касательное расслоение $TG \to G$ — тривиальное. б) Докажите, что группа $\mathrm{SU}(2)$ диффеоморфна трехмерной сфере. Докажите непосредственно, что касательное расслоение к трехмерной сфере тривиально (постройте явную тривиализацию).

Задача 4. а) Докажите, что для каждого k существует ровно два векторных расслоения ранга k с базой S^1 — тривиальное $\mathbf{1}_k$ и нетривиальное η_k. б) Пусть $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ и $f : S^1 \to S^1$ — возведение в степень n ($f(z) = z^n$). Найдите расслоение $f^*\eta_k$.

Задача 5. а) Докажите, что $\mathrm{SO}(n)$ — гладкое подмногообразие в $\mathrm{Mat}(n\times n) = \mathbb{R}^{n^2}$. Какова его размерность? б) Докажите, что $T_eSO(n) \subset \mathbb{R}^n$ есть множество $\mathfrak{so}(n)$ кососимметрических матриц $n \times n$ с нулевым следом. в) Пусть $Q : \mathrm{SO}(n) \to \mathrm{SO}(n)$ — оператор возведения в k-ю степень ($Q(A) = A^k$). Найдите $Q'(e) : \mathfrak{so}(n) \to \mathfrak{so}(n)$ и вычислите его спектр.

Задача 6. Сферизацией векторного расслоения $\xi : Y \to X$ называется пространство $(Y \setminus \Theta)/\sim$; здесь $\Theta \subset Y$ — график нулевого сечения, а отношение $\sim$ — пропорциональность с положительным коэффициентом ($u \sim v$, если $\xi(u) = \xi(v)$ и $u = \lambda v$, где $\lambda > 0$). Докажите, что группа $\mathrm{SO}(3)$ диффеоморфна сферизации касательного расслоения к двумерной сфере.

Задача 7. а) Докажите, что $\mathbb{C}P^1$ диффеоморфно двумерной сфере. б) Пусть $\ell \subset \mathbb{C}^2$ — прямая. Рассмотрим кососимметрическую билинейную форму Q на $\mathbb{C}^2$, заданную равенством $Q((z_1, z_2), (w_1, w_2)) = z_1w_2 - z_2w_1$. Докажите, что ненулевое линейное отображение $A : \ell \to \mathbb{C}^2/\ell$ однозначно задается множеством $\{v \in \ell \mid Q(v, Av) = 1\}$, которое состоит из двух диаметрально противоположных точек $v_0, -v_0 \in \ell$. в) Докажите, что элемент сферизации касательного расслоения к $\mathbb{C}P^1$ однозначно задается парой (ℓ, ϱ), где $\ell \subset \mathbb{C}^2$ — комплексная прямая, а $\varrho \subset \ell$ — вещественная прямая. г) Докажите, что многообразие $\mathrm{SO}(3)$ диффеоморфно трехмерному вещественному проективному пространству $\mathbb{R}P^3$. д) Докажите непосредственно, что касательное расслоение к $\mathbb{R}P^3$ тривиально (постройте явную тривиализацию).