7. КОГОМОЛОГИИ ДЕ РАМА.

Пусть M — компактное гладкое многообразие с краем, $U, V \subset M$ — открытые подмножества; $\iota_U : U \to M$, $\iota_V : V \to M$ — тавтологические вложения, $\delta_U : U \cap V \to U$ и $\delta_V : U \cap V \to U$ — тоже тавтологические вложения.

Задача 1. Докажите, что последовательность комплексов дифференциальных форм $0 \to \Omega(M) \xrightarrow{(\iota_U^*, \iota_V^*)} \Omega(U) \oplus \Omega(V) \xrightarrow{\delta_U^* - \delta_V^*} \Omega(U \cap V) \to 0$ является точной.

Задача 2 (теорема Бокштейна)**.** Пусть задана точная последовательность коцепных комплексов $0 \to A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \to 0$. а) Докажите, что последовательность когомологий $H^i(C) \xrightarrow{\beta_i^*} H^i(B) \xrightarrow{\alpha_i^*} H^i(A)$ точна. (Внимание: нулей по краям нет!) б) Пусть $x \in C_i$ замкнут: $d_i^C(x) = 0$. Докажите, что существует $y \in B_i$ такой, что $\beta_i(y) = x$, и что для всякого такого y существует и единствен $z \in A_{i+1}$ такой, что $\alpha_{i+1}(z) = d_i^B(y)$. в) Докажите, что элемент z, построенный в задаче 2б, замкнут: $d_{i+1}^A(z) = 0$. г) Пусть $y_1, y_2 \in B_i$ таковы, что $\beta_i(y_1) = \beta_i(y_2) = x$, и $z_1, z_2 \in A_{i+1}$ — элементы, построенные по y_1 и y_2 в задаче 2б. Докажите, что элементы z_1 и z_2 когомологичны: существует $u \in A_i$ такой, что $z_1 - z_2 = d_i^A(u)$. д) Пусть элемент $x \in C_i$ точен: $x = d_{i-1}^C(v)$ для некоторого $v \in C_{i-1}$, и пусть $z \in A_{i+1}$ — элемент, построенный по x в задаче 2б. Докажите, что также точен: $z = d_i^A(u)$ для некоторого $u \in A_i$. е) Из задач 2б–2д вытекает, что соответствие $x \mapsto z$ корректно определяет гомоморфизм $\delta : H_i(C) \to H_{i+1}(A)$. Докажите, что последовательность $H_i(B) \xrightarrow{\beta_i^*} H_i(C) \xrightarrow{\delta_i} H_{i+1}(A) \xrightarrow{\alpha_{i+1}^*} H_{i+1}(B)$ точна (и, тем самым, склеивается с последовательностью задачи 2а в “длинную точную последовательность” когомологий).

Длинная последовательность когомологий, построенная методом задачи 2 по последовательности задачи 1, называется последовательностью Майера–Виеториса.

Задача 3. а) Используя последовательность Майера–Виеториса, вычислите когомологии де Рама сферы S^n. б) Докажите, что $\omega \in \Omega^n(S^n)$ точна тогда и только тогда, когда $\int_{S^n} \omega = 0$.

Задача 4. а) Пусть $f : S^n \to S^n$ — гладкое отображение. Докажите, что $\int_{S^n} f^*\omega = \deg(f) \int_{S^n} \omega$, где число $\deg(f)$ не зависит от выбора формы $\omega \in \Omega^n(S^n)$. б) Пусть $c \in S^n$ — регулярное значение отображения f, т.е. если $x \in f^{-1}(c)$, то $\det f'(x) \neq 0$. Докажите, что прообраз $f^{-1}(c) \subset S^n$ конечен. в) Пусть c — регулярное значение f, и $f^{-1}(c) = \{x_1, \dots, x_N\}$. Докажите, что $\deg f = \sum_{i=1}^N \operatorname{sign} \det f'(x_i)$. г) Рассмотрите возможность обобщения понятия степени на гладкие отображения произвольных многообразий.

Указание. Для решения пункта 4в рассмотрите форму $\omega \in \Omega^n(S^n)$, носитель которой лежит в малой окрестности c, и примените к ней утверждение пункта 4а.