Листок 2

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ — пространство Ω с заданной на нем σ-алгеброй $\mathcal{F}$ и мерой P, такой что $P(\Omega) = 1$ (такая мера называется вероятностной). Пусть $T : \Omega \to \Omega$ — измеримое отображение этого пространства в себя. Для множества $A \in \mathcal{F}$ будем обозначать символом $T^{-1}(A)$ полный прообраз множества A. Преобразование T называется *сохраняющим меру* P, если для любого $A \in \mathcal{F}$ выполнено $P(T^{-1}(A)) = P(A)$. В этом случае мера P называется *инвариантной* для преобразования T.

Задача 2.1. Укажите инвариантные вероятностные меры для преобразований отрезка $[0;1] : x \to \{x + \alpha\}, x \to 1 - 2|x - 1/2|, x \to x/2 + 1/3$.

Вероятностные меры P_1 и P_2 на Ω называются *взаимно сингулярными*, если существует множество A, такое что $P_1(A) = 0$ и $P_2(A) = 1$.

Задача 2.2. Сингулярны ли дельта мера в точке $1/3$ и мера Лебега на отрезке $[0;1]$?

Задача 2.3. Для преобразования отрезка $[0;1] : x \to \{2x\}$ укажите

а) счетное число попарно сингулярных инвариантных мер.

б) континуум попарно сингулярных инвариантных мер.

Множество A называется T-*инвариантным*, если $T^{-1}(A) = A$. Преобразование T называется *эргодическим* относительно меры P, если любое T-инвариантное множество имеет P-меру 0 или 1.

Задача 2.4. Пусть $\Omega_n = \{1, 2, 3, \dots, n\}$, P_n — равномерная мера на Ω_n. Рассмотрим все возможные отображения $\Omega_n \to \Omega_n$. Сколько из них сохраняют меру P_n ? Сколько из них задают эргодические преобразования относительно меры P_n ?

Задача 2.5. Пусть $\Omega = [0;1]$ с мерой Лебега, $T : x \to \{x + \alpha\}$. Докажите, что если α рационально, то T не эргодично.

Задача 2.6. В условиях предыдущей задачи, докажите, что если α иррационально, то T эргодично.