Листок 3

Сигма-алгеброй множеств на произвольном множестве X называется такой набор подмножеств $\mathcal{F}$, что

1) $\emptyset \in \mathcal{F}$, $X \in \mathcal{F}$.

2) Если $A, B \in \mathcal{F}$, то $A \cup B, A/B \in \mathcal{F}$.

3) Если $A_i \in \mathcal{F}$, $i \in \mathbb{N}$, то $\cup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.

Из пунктов 2) и 3) следует, что $\mathcal{F}$ замкнуто относительно всех конечных и счетных операций пересечения, объединения и.т.д.

Задача 3.1. Опишите все возможные сигма-алгебры для конечного множества X.

Задача 3.2. *Борелевской* сигма-алгеброй на отрезке $[0;1]$ называется минимальная (по включению) сигма-алгебра, содержащая все открытые множества. Докажите, что борелевская сигма-алгебра содержит все замкнутые множества, все полуинтервалы вида $(a;b]$ и множество рациональных чисел.

Задача 3.3. Докажите, что существует подмножество отрезка $[0;1]$, не принадлежащее борелевской сигма-алгебре.

Пусть $(X, \mathcal{F}_X)$ и $(Y, \mathcal{F}_Y)$ — два произвольных пространства с заданными на них сигма-алгебрами. Отображение $f : X \to Y$ называется *измеримым*, если для любого множества $A \in \mathcal{F}_Y$ выполнено $f^{-1}(A) \in \mathcal{F}_X$.

Для произвольного метрического (или топологического) пространства *борелевской сигма-алгеброй* называется минимальная (по включению) сигма-алгебра, содержащая все открытые множества.

В дальнейших задачах мы считаем, что на используемых пространствах заданы борелевские сигма-алгебры.

Задача 3.4. Докажите, что любая непрерывная функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ измерима.

Задача 3.5. Докажите, что любая монотонная функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ измерима.

Говорят, что на пространстве с заданной сигма-алгеброй $(X, \mathcal{F})$ определена мера P, если каждому $A \in \mathcal{F}$ сопоставлено число $0 \leq P(A) \leq +\infty$, так что выполняется следующее условие: для попарно дизъюнктных множеств $A_1, A_2, \ldots$ мы имеем

$$\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right).$$

Задача 3.6. Опишите все вероятностные меры на конечном пространстве X с сигма-алгеброй, состоящей из всех подмножеств.

По любой мере P может быть определен интеграл. Эта конструкция описана в многих книгах, например, в Колмогоров-Фомин, “Элементы теории функций и функционального анализа”, Глава 5.

Пусть P_n, $n \geq 1$, и P — вероятностные меры на $\mathbb{R}$. Последовательность P_n *слабо сходится* к P, если для любой непрерывной ограниченной функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ выполнено

$$\int_{\mathbb{R}} f dP_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_{\mathbb{R}} f dP.$$

Задача 3.7. Докажите, что последовательность мер $\delta\left(\frac{1}{n}\right)$ слабо сходится к мере $\delta(0)$.

Задача 3.8. Найдите предел последовательности мер $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \delta\left(\frac{i}{n}\right)$.

Задача 3.9. Пусть P_n слабо сходятся к P, и пусть A — замкнутое подмножество $\mathbb{R}$. Докажите, что $\lim_{N\to\infty} P_n(A) \leq P(A)$. Приведите пример, когда неравенство строгое.