Листок 5

Пусть задано вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Преобразование T называется *(сильно) перемешивающим*, если для любых измеримых множеств A, B выполнено

$$\lim_{n\to\infty} P(A \cap T^{-n}B) = P(A)P(B).$$

Задача 5.1. Верно ли, что если пространство Ω конечно, то перемешивающие отображения совпадают с эргодическими ?

Задача 5.2. Докажите, что любое перемешивающее отображение эргодично, и приведите пример эргодического, но не перемешивающего отображения.

Задача 5.3. Пусть X^∞ — пространство бесконечных в обе стороны последовательностей $w = \dots x_{-1}x_0x_1x_2\dots$, где $x_i \in \{0, 1\}$. Для цилиндрического подмножества A будем обозначать символом N_1^A число “1” среди зафиксированных координат цилиндра, а символом N_0^A — число “0” среди зафиксированных координат цилиндра. Пусть P_c — вероятностная мера на X^∞, заданная на цилиндрах по правилу

$$P_c(A) = c^{N_1^A}(1-c)^{N_0^A}.$$

а) Опишите меры P_c для $c = 0$ и $c = 1$.

б) Докажите, что преобразование левого сдвига является перемешивающим относительно любой меры P_c.

в) Докажите, что меры P_c попарно сингулярны.

Задача 5.4. Пусть $T : [0;1]^n \to [0,1]^n$, $(x_1, x_2, \dots x_n) \to (\{x_1 + \alpha_1\}, \{x_2 + \alpha_2\}, \dots, \{x_n + \alpha_n\})$, — сдвиг n-мерного тора. Найдите необходимые и достаточные условия на $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, при которых это преобразование эргодично.

Зафиксируем произвольное пространство Ω и его измеримое преобразование T, и будем рассматривать вероятностные меры, которые сохраняются при этом преобразовании.

Задача 5.5. Пусть P_1 и P_2 — две произвольные эргодические меры (относительно преобразования T). Докажите, что эти две меры либо совпадают, либо взаимно сингулярны (то есть, существует множество A такое, что $P_1(A) = 1$ и $P_2(A) = 0$).

Задача 5.6. Докажите, что мера P эргодична тогда и только тогда, когда она не может быть представлена в виде линейной комбинации $\alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2$, где $P_1 \neq P_2$ — две (сохраняющихся при преобразовании T) вероятностные меры, $0 < \alpha_1, \alpha_2 < 1$.

Задача 5.7. Пусть $T : [0;1) \to [0;1)$ определяется формулами $T(x) = \{1/x\}$ при $x \neq 0$, и $T(0) = 0$. Докажите, что *мера Гаусса*

$$P(A) = \frac{1}{\ln(2)} \int_A \frac{dx}{1+x}$$

является инвариантной для преобразования T.

Задача 5.8. Пусть $x = [a_0; a_1, a_2, a_3, \dots]$ — разложение вещественного числа $x \in [0,1]$ в *непрерывную* (другое название — *цепную*) дробь (см. необходимые определения, например, в Википедии). Докажите, что число $k \in \mathbb{N}$ встречается в последовательности $\{a_1, a_2, \dots, a_k, \dots\}$ с относительной частотой

$$\frac{1}{\ln 2} \ln \frac{(k+1)^2}{k(k+2)}$$

для почти всех (по мере Лебега) чисел x.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.