Спектр кольца

Каждой точке $\bar{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ координатного пространства $\mathbb{C}^n$ соответствует идеал $I_{\bar{a}} = (x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n)$ в кольце многочленов $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$, состоящий из многочленов, равных нулю в $\bar{a}$. Вообще, всякой точке x на множестве (топологическом пространстве, многообразии, …) X отвечает идеал I_x в кольце функций (непрерывных, гладких, …) на X, образованный всеми функциями, обращающимися в ноль в x. Эти идеалы максимальны. Поэтому важно изучать множество максимальных идеалов данного кольца – это позволяет восстановить (в некотором смысле) по кольцу функций исходное множество. Но по разным причинам более плодотворно изучать множество простых идеалов.

Определение 1. *Спектром* коммутативного кольца A называется множество его простых идеалов, отличных от A. Обозначение: $\mathrm{Spec}(A)$.

Пример 2. Единственный простой идеал поля – нулевой, поэтому спектр поля – это точка:

$$\bullet$$

Пример 3. Спектр кольца целых чисел состоит из счётного числа точек (простых чисел) и одной так называемой *общей точки*, соответствующей нулевому идеалу.

$$\begin{array}{ccccc} & & (0) & & \\ (2) & (3) & (5) & (7) & \ldots \end{array}$$

Пример 4. Спектр кольца $\mathbb{C}[x]$ похож на спектр $\mathbb{Z}$. В нём также есть набор идеалов $I_a = (x - a)$ и общая точка – идеал (0).

$$\begin{array}{ccccc} & & (0) & & \\ \ldots & I_a & I_b & I_c & \ldots \end{array}$$

Задача 1. Опишите спектр кольца $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
Задача 2. Опишите спектр кольца $\mathbb{R}[x]$.
Задача 3. Опишите спектр кольца $\{a/b \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \not\vdots 3\}$.

Пример 5. Спектр прямого произведения есть объединение спектров.

Задача 4. Придумайте кольцо, у которого ровно 7 простых идеалов.

Чтобы по спектру кольца функций на многообразии восстановить исходное многообразие, на спектре нужно ввести топологию.

Определение 6. *Топологией* на множестве X называется семейство выделенных подмножеств X (они называются открытыми), обладающее следующими свойствами:

1. $\emptyset$ и X открыты;
2. U и V открыты $\Rightarrow U \cap V$ открыто;
3. $U_i, i \in I$ открыты $\Rightarrow \cup_i U_i$ открыто.

Дополнения до открытых множеств называют *замкнутыми*. Множество с фиксированной топологией называют *топологическим пространством*.

Определение 7. Два топологических пространства *гомеоморфны*, если между ними существует биекция, сохраняющая открытые множества.

Пример 8. Стандартная топология на прямой: открытым считается множество, которое вместе с каждой своей точкой x содержит некоторый интервал $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$.

Пример 9. Стандартная топология в $\mathbb{R}^n$: открытым считается множество, которое вместе с каждой своей точкой x содержит некоторый шар с центром в x.

Пример 10. Введем топологию на множестве $C[a, b]$ непрерывных функций на отрезке. Положим $\|f\| = \sup_{a \leqslant x \leqslant b} |f(x)|$, открытым будем считать множество, которое вместе с каждой своей функцией f содержит некоторое множество $\{g \mid \|f - g\| < \varepsilon\}$ для $\varepsilon > 0$.

Хорошие функции на топологическом пространстве – это непрерывные функции.

Определение 11. Функция f из топологического пространства X в топологическое пространство Y называется *непрерывной*, если для любого открытого $U \subset Y$ имеем, что $f^{-1}(U)$ открыто в X.

Определение 12. Последовательность (x_n) точек топологического пространства X *имеет предел* $x \in X$, если для любого открытого $U \subset X$, $x \in U$, найдётся $N \in \mathbb{N}$ такое, что $x_n \in U$ при $n > N$.

Замечание 13. Для функций $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ или последовательностей действительных чисел данные определения равносильны обычным.

Замечание 14. Все эти топологии хаусдорфовы, т.е. у любых двух различных точек есть непересекающиеся окрестности.

Определение 15 (Топология Зарисского)**.** *Замкнутым* подмножеством спектра A назовём множество вида $V(E) = \{\mathfrak{p} \mid \mathfrak{p} \supset E\}$, где $E \subset A$ – произвольное множество элементов. *Открытыми* назовём дополнения до замкнутых множеств.

Предложение 16. *Такое семейство множеств $V(E)$ действительно задаёт топологию.*

Доказательство. Пустое и всё входят, так как $V(\emptyset) = \operatorname{Spec}(A)$, $V(1) = \emptyset$.

Имеем $V(\cup_i E_i) = \cap_i V(E_i)$ для любого семейства множеств $E_i \subset A$. Поэтому любое пересечение замкнутых замкнуто.

Для любого подмножества $E \subset A$ рассмотрим идеал $I(E) = \langle E \rangle$, порождённый E. Очевидно, что $V(E) = V(I(E))$, так что вместо произвольных подмножеств в определении замкнутого по Зарисскому множества можно брать идеалы.

Для объединения замкнутых множеств имеем: $V(I_1) \cup V(I_2) = V(I_1 \cap I_2)$, так что оно также замкнуто. □

Пример 17. Топология Зарисского на $\operatorname{Spec}(\mathbb{Z})$: $V((m)) = \{(p) \mid p$ – простой делитель $m\}$ при $m \neq 0$. Замкнуты все конечные множества, не содержащие общей точки, и весь спектр.

Пример 18. Топология на $\operatorname{Spec}(\mathbb{C}[x])$: $V((f)) = \{(p) \mid p$ – неприводимый делитель $f\}$ при $f \neq 0$. Замкнуты все конечные множества, не содержащие общей точки, и весь спектр.

Задача 5. Покажите, что $\operatorname{Spec}(A \times B)$ есть объединение двух открыто-замкнутых непересекающихся подмножеств, гомеоморфных $\operatorname{Spec}(A)$ и $\operatorname{Spec}(B)$.

Топология Зарисского весьма экзотична. Так, в кольце без делителей нуля нулевой идеал является простым и называется *общей точкой*. Это название объясняется тем, что общая точка лежит в любом непустом открытом подмножестве. Действительно, если $V(E) \neq \mathrm{Spec}(A)$, то $E \subset A$ непусто, поэтому $(0) \not\supset E$ и $(0) \notin V(E)$. Как следствие, любые окрестности двух разных точек пересекаются (как минимум, по общей точке)!

Более того, замыкание одноточечного множества может не совпадать с ним самим.

Задача 6. Пусть $x, y \in \mathrm{Spec}(A)$ – точки, а $\mathfrak{p}, \mathfrak{q} \subset A$ – соответствующие простые идеалы. Докажите, что:

a) Множество $\{x\}$ замкнуто титтк $\mathfrak{p}$ максимален.

b) Замыкание $\overline{\{x\}}$ есть $V(\mathfrak{p})$.

c) $y \in \overline{\{x\}}$ титтк $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{q}$.

Таким образом, «чем меньше идеал, тем больше замыкание соответствующей точки».

Определение 19. Максимальные идеалы называются *замкнутыми точками* спектра.

Пример 20. Спектр $\mathbb{C}[x, y]$. Тут есть: 1. общая точка – идеал 0, 2. главные простые идеалы вида (f), где $f = f(x, y)$ – неприводимый многочлен, 3. максимальные идеалы вида $\mathfrak{m}_{a,b} = (x - a, y - b)$.

Замыкание общей точки – весь спектр, точки $\mathfrak{m}_{a,b}$ замкнуты. А замыкание точки (f) состоит из (f) и всех точек $\mathfrak{m}_{a,b}$, для которых $f(a, b) = 0$. Эти точки соответствуют неприводимым алгебраическим кривым на $\mathbb{C}^2$.

Замечание 21. Скажем здесь о связи между простыми (точнее, неприводимыми) элементами кольца и простыми идеалами. Предположим для удобства, что в кольце A нет делителей нуля. Элемент $a \in A$ называется *неприводимым*, если для любого его разложения $a = bc$ либо b, либо c обратим. Несложно показать, что если главный идеал (f) прост, то f неприводим. Действительно, пусть дано разложение $f = ab$. Тогда $ab \in (f)$, и в силу простоты a или $b \in (f)$, будем считать, что $a \in (f)$. Значит, $a = kf$ для некоторого $k \in A$. Получаем $f = kbf$, $f(1 - kb) = 0$ и так как в A нет делителей нуля, то $kb = 1$ и b обратим.

Обратное неверно: для неприводимого f идеал (f) может не быть прост. Такое бывает, если в кольце разложение на неприводимые множители неоднозначно. Однако, для колец с однозначным разложением на неприводимые множители из неприводмиости f следует простота (f). Это даёт нам примеры простых идеалов в таких кольцах (например, в кольце многочленов): главные идеалы, порождённые неприводимым элементом.

Любое открытое множество в $\mathbb{R}^n$ состоит из ε-окрестностей разных точек. Точно так же, любое открытое подмножество в спектре кольца есть объединение главных открытых множеств.

Определение 22. *Главным открытым* подмножеством спектра называется множество

$$D_f = \mathrm{Spec}(A) \setminus V(f) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A) \mid f \notin \mathfrak{p}\},$$

где $f \in A$ – некоторый элемент.

Предложение 23. *Главные открытые множества составляют базу топологии Зарисского, т.е. любое открытое множество $U \subset \mathrm{Spec}(A)$ есть $\cup_{D_f \subset U} D_f$.*

Доказательство. Пусть $U = \mathrm{Spec}(A) \setminus V(E)$ и $\mathfrak{p} \in U$. Тогда $\mathfrak{p} \not\supset E$, возьмём элемент $a \in E, a \notin \mathfrak{p}$. Получим, что $\mathfrak{p} \in D_a$ и $D_a \subset U$. $\square$

Задача 7. Покажите, что
$D_{fg} = D_f \cap D_g$;
$D_f = \emptyset \iff f$ – нильпотент;
$D_f = \mathrm{Spec}(A) \iff f$ обратим;

Предложение 24. *Топологическое пространство* $\mathrm{Spec}(A)$ *компактно: из любого его покрытия открытыми множествами можно выбрать конечное подпокрытие.*

Доказательство. Можно считать, что покрытие образовано главными открытыми множествами, заменив каждое данное открытое множество на все лежащие в нём главные открытые подмножества. Если $\mathrm{Spec}(A) = \cup_{e\in E} D_e$, то $V(+_{e\in E}(e)) = \cap_e V(e) = \emptyset$. Это значит, что элементы E порождают кольцо A как идеал. Поэтому найдётся конечная сумма $1 = \sum_{i=1}^n e_i a_i$, где $e_i \in E, a_i \in A$. Тогда $(e_1) + (e_2) + \ldots + (e_n) = (e_1, \ldots, e_n) = A$ и $\cup_{i=1}^n D_{e_i} = \mathrm{Spec}(A)$. $\square$

Таким образом, спектр кольца становится геометрическим объектом. Про простые идеалы кольца принято думать как про *точки* спектра. Заметим, что среди точек есть как замкнутые точки (это максимальные идеалы), так и более «расплывчатые», замыкание которых содержит уйму других точек.

А про элементы кольца принято думать как про функции, определённые на спектре. Где эти функции принимают значение – отдельный вопрос. Однако ясно, в каком случае надо считать, что функция обращается в ноль: если функция на спектре соответствует элементу $a \in A$, то она обращается в ноль в тех простых идеалах $\mathfrak{p}$, для которых $\mathfrak{p} \ni a$. Стало быть, главное множество D_f – это множество точек спектра, в которых не обращается в ноль функция f. А замкнутое множество $V(E)$ – множество точек, где одновременно обращаются в ноль все функции из некоторого семейства $E \subset A$.