Гомоморфизмы колец

На прошлой лекции мы по всякому подмножеству $E \subset A$ построили замкнутое подмножество $V(E) \subset \mathrm{Spec}(A)$. Обратно, по любому подмножеству $X \subset \mathrm{Spec}(A)$ можно определить множество $I(X)$ элементов кольца, обращающихся в ноль во всех точках X.

Предложение 1. *Множество $I(X)$ – это идеал.*

Доказательство. $I(X)$ – это пересечение простых идеалов, отвечающих точкам X. $\square$

Предложение 2. *Для замкнутого подмножества $V \subset \mathrm{Spec}(A)$ имеем $V(I(V)) = V$.*

Доказательство. Вложение $V(I(V)) \supset V$ очевидно: множество общих нулей семейства функций, обращающихся в ноль на заданном множестве, содержит это множество. С другой стороны, $V = V(E)$ замкнуто и $I(V) \supset E$: множество функций, обращающихся в ноль на множестве нулей заданного семейства функций, содержит это семейство. Поэтому $V(I(V)) \subset V(E) = V$, откуда следует равенство. $\square$

Можно было бы подумать, что так устроено взаимно-однозначное соответствие между идеалами в A и замкнутыми подмножествами в $\mathrm{Spec}(A)$. Однако это не так: идеалов больше.

Пример 3. Если $I_n = (x^n) \subset \mathbb{C}[x]$ – идеалы, то $V(I_n) = \{(x)\}$ не зависит от n.

Определение 4. *Радикалом* идеала I называется множество

$$r(I) = \{x \in A \mid \exists n \in \mathbb{N}\ x^n \in I\}.$$

Пример 5. Найдём радикалы идеалов в $\mathbb{Z}$. Очевидно, $x^n \vdots m$ при больших $n \Leftrightarrow x$ содержит все простые делители m. Поэтому

$$r((p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k})) = (p_1 \dots p_k).$$

Пример 6. Радикал 0 – это нильрадикал.

Предложение 7. *Для любого идеала I*

$$r(I) = \cap_{\mathfrak{p} \supset I} \mathfrak{p},$$

где пересечение берется по всем простым идеалам, содержащим I.

Доказательство. Случай $I = 0$ был рассмотрен на первой лекции. Общий случай сводится к нему переходом к факторкольцу. Действительно, пусть $a \notin r(I)$. Тогда $[a] \ni N(A/I)$. Это значит, что найдётся простой идеал $\mathfrak{q}$ в A/I, т.ч. $[a] \notin \mathfrak{q}$. Положим $\mathfrak{p} = \{a \in A \mid [a] \in \mathfrak{q}\}$. Легко проверить, что $\mathfrak{p}$ прост и что $a \notin \mathfrak{p}$. $\square$

Следствие 8. *Для любого идеала $I \subset A$ верно $I(V(I)) = r(I)$.*

Таким образом, операции I и V устанавливают биекцию между всеми замкнутыми подмножествами спектра кольца и всеми идеалами I кольца, для которых $r(I) = I$. Такие идеалы называют *радикальными*.

Определение 9. *Подкольцо* кольца A – это подмножество, которое 1) замкнуто относительно сложения и взятия противоположного, 2) замкнуто относительно умножения и 3) содержит 1.

Пример 10. $\mathbb{C}[x] \subset \mathbb{C}[x,y]$, $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, $\mathbb{C}[x^2, xy] \subset \mathbb{C}[x,y]$ – подкольца.

Замечание 11. Условие 3) из определения подкольца не следует из первых двух, см. пример ниже.

Пример 12. Подмножество $\mathbb{Z} = \{(n,0)\} \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ – не подкольцо.

Определение 13. *Гомоморфизм* колец $f\colon A \to B$ – это отображение, для которого выполнены свойства:

1. $f(a+b) = f(a) + f(b)$;
2. $f(ab) = f(a) \cdot f(b)$;
3. $f(1) = 1$.

Пример 14.

1. Взятие по модулю $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, $n \mapsto [n]$.
2. Вложение $\mathbb{C} \to \mathbb{C}[x]$, $a \mapsto a$.
3. Вообще, тождественное отображение из подкольца в кольцо, – гомоморфизм.
4. Вычисление $\mathbb{C}[x] \to \mathbb{C}$, $p \mapsto p(10)$.
5. Для любого идеала $I \subset A$ имеется гомоморфизм $A \to A/I$ такой, что $a \mapsto [a]$. Он называется *каноническим.*
6. Из $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ в $\mathbb{Z}$ нет гомоморфизмов.
7. Из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{Q}$ нет гомоморфизмов.

Замечание 15. Условие 3 в определении гомоморфизма не следует из первых двух. Например, нулевое отображение или вложение $A \to A \times B$ – не гомоморфизмы.

Определение 16. *Образ* гомоморфизма $f\colon A \to B$ обозначается $\operatorname{im} f$.

Предложение 17. *Образ гомоморфизма является подкольцом.*

Замечание 18. Подкольцо – всё равно, что инъективный гомоморфизм в кольцо.

Замечание 19. В любом кольце есть подкольцо, изоморфное $\mathbb{Z}$ или $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$.

Определение 20. *Ядром* гомоморфизма $f\colon A \to B$ называется множество

$$\ker f = \{a \in A \mid f(a) = 0\}.$$

Предложение 21. *Ядро – это идеал.*

Пример 22. Ядра гомоморфизмов из примера 14:

1. $\ker(\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) = (m)$;

2,3. ядро вложения нулевое;

4. для $f\colon \mathbb{C}[x] \xrightarrow{p \mapsto p(10)} \mathbb{C}$ $\ker f = (x - 10)$;

5. ядро канонического гомоморфизма $A \to A/I$ – идеал I.

Замечание 23. Любой идеал I является ядром некоторого гомоморфизма, а именно канонического гомоморфизма $A \to A/I$.

Предложение 24. *Гомоморфизм инъективен* $\iff$ *его ядро нулевое.*

Предложение 25. *Для гомоморфизма* $f\colon A \to B$ *имеем*

$$\operatorname{im} f \cong A/\ker f.$$

Доказательство. Построим отображение $g\colon A/\ker f \to \operatorname{im} f$. Положим $g([a]) = f(a)$, видно, что это – корректно определенный гомоморфизм. Также ясно, что g сюръективно и имеет нулевое ядро, а значит, g биекция. □

Следствие 26. *Сюръективный гомоморфизм – то же, что и факторкольцо по идеалу.*

Со всяким гомоморфизмом колец связаны два отображения на идеалах. Первое из них – это ограничение.

Определение 27. Пусть $f\colon A \to B$ – гомоморфизм и $J \subset B$ – идеал. Через J^c обозначается множество

$$f^{-1}(J) = \{a \in A \mid f(a) \in J\},$$

оно является идеалом и называется *ограничением*, или *сужением*, J.

Замечание 28. Ограничение любого идеала содержит ядро гомоморфизма. Для инъективных гомоморфизмов (т.е., подколец), ограничение совпадает с пересечением.

Предложение 29. *Пусть гомоморфизм* $f\colon A \to B$ *сюръективен. Тогда отображение ограничения устанавливает взаимно-однозначное соответствие между идеалами в* B *и идеалами в* A*, содержащими* $\ker f$.

Доказательство. Для любого идеала $J \subset B$ идеал $J^c \subset A$ содержит ядро f. Наоборот, для любого идеала $I \supset \ker f$ в A множество $f(I)$ – это идеал в B и $f(I)^c$=I. □

Задача 1. Проверьте это и покажите, что так получается биекция.

Предложение 30. *1.* $I \subset J \Rightarrow I^c \subset J^c$;

2. $(I \cap J)^c = I^c \cap J^c$;

3. $I^c + J^c \subset (I + J)^c$;

4. $J = B \iff J^c = A$.

Задача 2. Для гомоморфизма вложения $\mathbb{R}[x] \to \mathbb{C}[x]$ найдите ограничения идеалов $(x-i)$, $(x-2-3i)$.
Задача 3. Найдите ограничения идеалов (x^2), $(x-1)$, $(x+1)$ для гомоморфизма $\mathbb{R}[x,y] \to \mathbb{R}[x]$, $p(x,y) \mapsto p(x,x^2)$.

Предложение 31. *Если идеал $J \subset B$ прост, то идеал $J^c \subset A$ тоже прост.*

Доказательство. Рассмотрим композицию f и канонического гомоморфизма: $f' \colon A \to B \to B/J$. Очевидно, $\ker f' = J^c$. По предложению 25 имеем $A/J^c \cong \operatorname{im} f' \subset B/J$. Так как J прост, в B/J, а значит, и в $\operatorname{im} f$ нет делителей нуля, и поэтому J^c прост.

Конечно, простоту J^c можно проверить и непосредственно, по определению. □

Пример 32. Для максимальных идеалов аналогичное неверно. Для гомоморфизма вложения $\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ и максимального идеала $J = (0) \subset \mathbb{Q}$ идеал $J^c = (0) \subset \mathbb{Z}$ не максимальный.

Таким образом, с каждым гомоморфизмом колец $f \colon A \to B$ связано отображение спектров $f^* \colon \operatorname{Spec}(B) \to \operatorname{Spec}(A)$ в обратную сторону: $f^*(\mathfrak{p}) = \mathfrak{p}^c$.

Предложение 33. *Отображение f^* непрерывно в топологии Зарисского.*

Доказательство. Надо проверить, что для любого замкнутого множества $V = V(E) \subset \operatorname{Spec}(A)$ его прообраз $(f^*)^{-1}(V) \subset \operatorname{Spec}(B)$ замкнут.

Действительно, для простого идеала $\mathfrak{p} \subset B$ имеем

$$\mathfrak{p} \in (f^*)^{-1}(V(E)) \Leftrightarrow f^*(\mathfrak{p}) \in V(E) \Leftrightarrow f^{-1}(\mathfrak{p}) \supset E \Leftrightarrow f(E) \subset \mathfrak{p} \Leftrightarrow \mathfrak{p} \in V(f(E)).$$

Значит, прообраз $(f^*)^{-1}(V)$ есть $V(f(E))$ – замкнутое подмножество в $\operatorname{Spec}(B)$. □

Задача 4. Что есть прообраз множества $D_a \subset \operatorname{Spec}(A)$ при отображении f^*?

Другая операция над идеалами, связанная с гомоморфизмом колец, – это расширение. Если $f \colon A \to B$ и $I \subset A$ – идеал, то его расширение I^e определяется как идеал, порождённый множеством $f(I)$.

Замечание 34. Само множество $f(I)$ вовсе не обязано быть идеалом – рассмотрите вложение $\mathbb{Z}$ в $\mathbb{Q}$.

Замечание 35. Расширение часто может совпадать со всем кольцом, см. тот же пример.

Задача 5. Найдите расширение идеала $(x-a, y-b)$ при гомоморфизме $f \colon \mathbb{C}[x,y] \to \mathbb{C}[z]$, $p(x,y) \mapsto p(z,z)$.
Задача 6. Найдите расширения идеалов $(y-1)$, $(x-y)$, $(2x-y-1)$ для гомоморфизма $\mathbb{R}[x,y] \to \mathbb{R}[x]$, $p(x,y) \mapsto p(x,x^2)$.
Задача 7. Проверьте, что

1. $I \subset J \Rightarrow I^e \subset J^e$;

2. $(I \cap J)^e \subset I^e \cap J^e$;

3. $I^e + J^e = (I+J)^e$.

Задача 8. Пусть $f\colon A \to B$ – гомоморфизм, C – множество идеалов A, являющихся сужениями, а E – множество идеалов в B, являющихся расширениями. a) Покажите, что

$$C = \{I \mid I^{ec} = I\}, \quad E = \{J \mid J^{ce} = J\}.$$

b) Проверьте, что отображения расширения и сужения – взаимно обратные биекции между C и E.

Задача 9. Покажите, что $r(J)^c = r(J^c)$ и $r(I)^e \subset r(I^e)$.