Аффинные алгебраические многообразия

Сегодня мы рассмотрим аффинные алгебраические многообразия и сравним их со спектрами колец полиномиальных функций на них. Это основной пример, мотивирующий изучение коммутативных колец.

Пусть k – некоторое поле.

Определение 1. *Аффинным n-мерным пространством* $\mathbb{A}^n_{\mathsf{k}}$ над k называется множество наборов $(x_1, \ldots, x_n)$ элементов k длины n.

Алгебраическим подмножеством аффинного пространства $\mathbb{A}^n$ (или *аффинным алгебраическим многообразием*) называется множество решений некоторой (возможно, бесконечной) системы уравнений $f_\alpha(x_1, \ldots, x_n) = 0$, где $f_\alpha \in \mathsf{k}[x_1, \ldots, x_n]$ – многочлены.

Как мы позже увидим, на самом деле всегда достаточно конечного числа уравнений – остальные будут из них следовать. Также заметим, что вместо системы уравнений можно рассматривать идеал в кольце многочленов, порождённый всеми её уравнениями.

Пример 2.

1. окружность – задаётся уравнением $x^2 + y^2 - 1 = 0$ в вещественной плоскости $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$;
2. параметризованная кривая $\{(t^2, t^3, t^4) \mid t \in \mathbb{C}\} \subset \mathbb{A}^3_{\mathbb{C}}$ задаётся уравнениями $x^3 - y^2 = z - x^2 = 0$;
3. точка $(a_1, \ldots, a_n)$ задаётся уравнениями $x_i - a_i = 0$.
4. график функции $y = \sin x$ – не алгебраическое подмножество.

Лемма 3. *Объединение и пересечение алгебраических подмножеств – алгебраическое подмножество.*

Доказательство. Пусть алгебраические подмножества V и W заданы системами уравнений $f_i = 0$ и $g_j = 0$. Тогда $V \cap W$ задаётся системой $f_i = g_j = 0$, а $V \cup W$ – системой $f_i g_j = 0$ (все попарные произведения). $\square$

Определение 4. Функция $F\colon V \to \mathsf{k}$ на алгебраическом подмножестве $V \subset \mathbb{A}^n_{\mathsf{k}}$ называется *регулярной*, если найдётся многочлен $f \in \mathsf{k}[x_1, \ldots, x_n]$ такой, что $F = f|_V$. Регулярные функции на алгебраическом подмножестве образуют кольцо, оно обозначается $\mathsf{k}[V]$.

Одно и то же подмножество можно задавать разными системами уравнений. Рассмотрим максимальную из них.

Определение 5. *Идеалом* алгебраического подмножества $V \subset \mathbb{A}^n_{\mathsf{k}}$ называется

$$I(V) = \{f \in \mathsf{k}[x_i] \mid f|_V = 0\}$$

– множество всех многочленов, обращающихся в нуль тождественно на V.

Пример 6. Всякой точке $\bar{a} \in \mathbb{A}^n$ соответствует максимальный идеал $I_{\bar{a}} = (x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n)$.

Очевидно, идеал многообразия – это идеал в кольце многочленов. Также, если даны вложенные алгебраические подмножества $U \subset V$, то регулярные функции на V, обращающиеся в нуль тождественно на U, образуют идеал в $\mathsf{k}[V]$.

Предложение 7. *Для алгебраического подмножества $X \subset \mathbb{A}^n_{\mathsf{k}}$ кольцо функций несложно вычислить:*

$$\mathsf{k}[X] \cong \mathsf{k}[x_1, \dots, x_n]/I(X).$$

Доказательство. Имеется сюръективный гомоморфизм ограничения $\mathsf{k}[x_1, \dots, x_n] \to \mathsf{k}[X]$. Его ядро по определению – идеал многообразия X, поэтому $\mathsf{k}[X] \cong \mathsf{k}[x_1, \dots, x_n]/I(X)$. □

Предложение 8. *Для вложенных алгебраических подмножеств $X \subset Y \subset \mathbb{A}^n_{\mathsf{k}}$ верно*

$$\mathsf{k}[X] \cong \mathsf{k}[Y]/I(X),$$

где $I(X) \subset \mathsf{k}[Y]$ – идеал подмножества X.

Всякое алгебраическое подмножество восстанавливается по его идеалу в кольце многочленов. Более того, большинство свойств подмножеств легко выразить на языке колец многочленов и идеалов в них. Обозначим для любого идеала $I \subset \mathsf{k}[x_i]$ через $V(I) \subset \mathbb{A}^n$ множество общих нулей всех функций из I. Ясно, что множества вида $V(I)$ – в точности алгебраические подмножества. Для соответствий V и I между идеалами в кольце многочленов и алгебраическими подмножествами $\mathbb{A}^n$ верны свойства, подобные тем, что разбирались на прошлой лекции:

Предложение 9. *Для любых идеалов $I, I_1, I_2 \subset \mathsf{k}[x_1, \dots, x_n]$ и любых алгебраических подмножеств $Y, Y_1, Y_2 \subset \mathbb{A}^n$ верно*

1. $V(I(Y)) = Y$,
2. $I(V(I)) \supset I$,
3. $Y_1 \subset Y_2 \Rightarrow I(Y_1) \supset I(Y_2)$,
4. $I_1 \subset I_2 \Rightarrow V(I_1) \supset V(I_2)$,
5. *Операция I устанавливает биекцию множества алгебраических подмножеств $\mathbb{A}^n$ на некоторое семейство идеалов в $\mathsf{k}[x_1, \dots, x_n]$,*
6. $V(I_1 + I_2) = V(I_1) \cap V(I_2)$,
7. $V(I_1 \cap I_2) = V(I_1) \cup V(I_2)$,
8. $I(Y_1 \cup Y_2) = I(Y_1) \cap I(Y_2)$,
9. $I(Y_1 \cap Y_2) \supset I(Y_1) + I(Y_2)$.

Задача 1. a) Докажите свойства 6-8 и b) приведите пример, показывающий, что в 9 равенства может не быть.

Конечно, аналогичные свойства верны и для соответствий между алгебраическими подмножествами заданного алгебраического подмножества X и идеалами в кольце $\mathsf{k}[X]$.

Определение 10. Алгебраическое подмножество называется *неприводимым*, если его нельзя представить в виде объединения двух строго меньших алгебраических подмножеств.

Предложение 11. *Подмножество X неприводимо $\iff$ в кольце $\mathsf{k}[X]$ нет делителей нуля $\iff$ идеал $I(X) \subset \mathsf{k}[x_1, \dots, x_n]$ прост.*

Доказательство. Если есть делители нуля: $f_1 f_2 = 0$, то получаем разложение: $X = \{f_1 = 0\} \cup \{f_2 = 0\}$. Обратно, если разложение $X = X_1 \cup X_2$ нетривиально, то найдутся функции f_i такие, что $f_i|_{X_i} = 0$ и $f_i \neq 0$. Тогда $f_1 f_2 = 0$, значит есть делители нуля. Вторая равносильность очевидна. $\square$

Задача 2. Рассмотрим подмножество X в $\mathbb{C}^3$, заданное уравнениями

$$x_1 x_2 - x_3^2 = x_3 - \lambda(x_1 + x_2) = 0,$$

где $\lambda \in \mathbb{C}$ – некоторый параметр.

a) Разложите его в объединение неприводимых подмножеств X_i. Нарисуйте картинку.

b) Найдите идеалы I_i каждого из них.

c) Верно ли, что $(x_1 x_2 - x_3^2, x_3 - \lambda(x_1 + x_2)) = \cap I_i$?

Задача 3. Рассмотрим подмножество X в $\mathbb{C}^4$, заданное уравнениями

$$x_1 x_4 - x_2 x_3 = x_1 x_3 - x_2^2 = 0.$$

a) Разложите его в объединение неприводимых подмножеств X_i.

b) Найдите идеалы I_i каждого из них.

c) Верно ли, что $(x_1 x_4 - x_2 x_3, x_1 x_3 - x_2^2) = \cap I_i$?

Позже мы покажем, что любое алгебраическое подмножество есть объединение конечного числа неприводимых множеств.

Таким образом, алгебраические подмножества взаимно-однозначно соответствуют идеалам вида $I(Y)$, где $Y \subset \mathbb{A}^n$ – некое подмножество. Естественно выяснить, какие идеалы в кольце многочленов возникают как идеалы подмножеств. Хороший ответ существует только для алгебраически замкнутого поля k. Предположим в дальнейшем, что поле алгебраически замкнуто, т.е. что любой многочлен с коэффициентами в нём имеет корень.

Главную роль в дальнейшем будет играть

Теорема 12 (теорема Гильберта о нулях)**.** *Если поле k алгебраически замкнуто, то любой максимальный идеал в $\mathsf{k}[x_1, \dots, x_n]$ имеет вид $(x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n)$, т.е. является идеалом некоторой точки $\mathbb{A}^n_{\mathsf{k}}$.*

Мы докажем эту теорему позже. Пока же отметим её следствия (верные только в случае алгебраически замкнутого поля k).

Предложение 13. *Любой нетривиальный идеал $I \subset \mathsf{k}[x_1, \dots, x_n]$ задаёт непустое алгебраическое подмножество в $\mathbb{A}^n$.*

Доказательство. Вложим I в максимальный идеал $(x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n)$. Тогда $\bar{a} = (a_1, \dots, a_n) \in V(I)$. $\square$

Предложение 14. *Идеал многообразия X, заданного идеалом I, есть $r(I)$.*

Доказательство. Пусть $f|_X = 0$. Рассмотрим $\bar{X} \subset \mathbb{A}^{n+1}$, заданное уравнениями

$$f_i(x_1, \dots, x_n) = 0, f_i \in I, \quad \text{и} \quad x_{n+1} f(x_1, \dots, x_n) - 1 = 0.$$

Очевидно, $\bar{X}$ пусто: если все $f_i(x_1, \dots, x_n) = 0$, то $x_{n+1} f(x_1, \dots, x_n) - 1 = -1 \neq 0$. Значит, по предложению 13 многочлены $f_i(x_1, \dots, x_n)$ и $x_{n+1} f(x_1, \dots, x_n) - 1$ порождают всё кольцо $\mathsf{k}[x_1, \dots, x_{n+1}]$. Запишем

$$1 = b(x_1, \dots, x_{n+1})(x_{n+1} f(x_1, \dots, x_n) - 1) + \sum a_i(x_1, \dots, x_{n+1}) f_i(x_1, \dots, x_n),$$

здесь сумма конечна. Пусть N – максимальная степень, с которой x_{n+1} входит в многочлены a_i, домножим на f^N.

$$f(x)^N = f(x)^N b(x)(x_{n+1}f(x)-1) + \sum f(x)^N a_i(x_1,\ldots,x_{n+1})f_i(x_1,\ldots,x_n).$$

Для всех встреч x_{n+1}^d в a_i заменим $x_{n+1}^d f^d$ на $1+(x_{n+1}^d f^d - 1) = 1 + (x_{n+1}f-1)(\ldots)$. Перенесём $(x_{n+1}f-1)(\ldots)$ в слагаемое, где $b(x)(x_{n+1}f(x)-1)$. Получим:

$$f(x_1,\ldots,x_n)^N = \widetilde{b}(x)(x_{n+1}f(x_1,\ldots,x_n)-1) + \sum \widetilde{a}_i(x_1,\ldots,x_n)f_i(x_1,\ldots,x_n).$$

Здесь f^N и все слагаемые суммы не содержат x_{n+1}, а $\widetilde{b}(x)(x_{n+1}f-1)$ содержит её, если только $\widetilde{b}(x)\neq 0$. Значит, $\widetilde{b}(x)=0$

$$f(x_1,\ldots,x_n)^N = \sum \widetilde{a}_i(x_1,\ldots,x_n)f_i(x_1,\ldots,x_n) \in I,$$

что и требовалось. □

Следствие 15. *Идеалы алгебраических подмножеств – это в точности идеалы, для которых $I = r(I)$. Неприводимым подмножествам при этом отвечают простые идеалы.*

Предложение 16. *Кольцо A над k является кольцом регулярных функций на алгебраическом многообразии $\iff$ A – конечно порождённое над k кольцо без нильпотентов.*

Доказательство. Рассмотрим сюръекцию $\mathsf{k}[x_1,\ldots,x_n]\to A$, пусть I – её ядро, а X – множество нулей функций из идеала I. Тогда $A\cong \mathsf{k}[x_1,\ldots,x_n]/I$ и $\mathsf{k}[X]\cong \mathsf{k}[x_1,\ldots,x_n]/I(X)$. При этом $I(X)=r(I)=I$ так как в A нет нильпотентов. □

Задача 4. Рассмотрим подкольцо в $\mathbb{C}[x,y]$, порождённое всеми мономами $x^a y^b$ с $b\leqslant 2a$.
a) Покажите, что оно является кольцом регулярных функций на некотором алгебраическом многообразии. b) Найдите это многообразие и его идеал.
Задача 5. Рассмотрим подкольцо в $\mathbb{C}[x,y]$, порождённое всеми мономами $x^a y^b$ с $b\leqslant \sqrt{2}a$. Покажите, что оно не является кольцом регулярных функций на алгебраическом многообразии.
Задача 6. Рассмотрим подкольцо в $\mathbb{C}[t]$, порождённое всеми мономами t^a с a) $a\geqslant 2$; b) $a\geqslant 3$. Покажите, что оно является кольцом регулярных функций на алгебраическом многообразии. Найдите это многообразие и его идеал.
Задача 7 (конус над скрученной кривой). Рассмотрим подкольцо в $\mathbb{C}[x,y]$, порождённое всеми мономами $x^a y^b$ с $a+b\,\vdots\,3$.
a) Покажите, что оно является кольцом регулярных функций на алгебраическом многообразии.
b) Докажите, что это многообразие изоморфно образу отображения $\sigma\colon \mathbb{C}^2\to\mathbb{C}^4, \sigma(x,y) = x^3, x^2y, xy^2, y^3$.
c) Найдите идеал этого многообразия.

Теперь сравним алгебраическое подмножество $X\subset \mathbb{A}^n$ со спектром кольца $\mathsf{k}[X]$ (по-прежнему k алгебраически замкнуто). Множество точек X совпадает со множеством замкнутых точек $\mathrm{Spec}(\mathsf{k}[X])$. Кроме того, в $\mathrm{Spec}(\mathsf{k}[X])$ есть незамкнутые точки, это немаксимальные простые идеалы $\mathsf{k}[X]$. Они соответствуют неприводимым алгебраическим подмножествам X, отличным от точек. Таким образом, спектр кольца $\mathsf{k}[X]$ получается из множества X добавлением для каждого его неприводимого подмножества, отличного от точки, по элементу – «общей точке».

Для алгебраически незамкнутых полей почти всё из сказанного выше неверно.

Пример 17.

1. Идеал $I = (x^2+1) \subset \mathbb{R}[x]$ максимальный, но не имеет вида $(x-a), a \in \mathbb{R}$.
2. Множество $V(I) \subset \mathbb{A}^1_{\mathbb{R}}$ для такого идеала пусто и $I(V(I)) = \mathbb{R}[x] \neq r(I)$.
3. Кольцо $\mathbb{C}$ конечно порождено над $\mathbb{R}$ и не имеет нильпотентов, не не являтся кольцом функций на алгебраическом подмножестве в $\mathbb{R}^n$.

Задача 8. Пусть $I \subset \mathsf{k}[x_1, \ldots, x_n]$ – простой идеал. Верно ли, что множество $V(I) \subset \mathbb{A}^n_{\mathsf{k}}$ неприводимо?

Проблемы возникают из-за того, что алгебраические подмножества рассматриваются в множестве k^n, а не в спектре кольца $\mathsf{k}[x_1, \ldots, x_n]$. При переходе к спектру все эти проблемы исчезают, как было видно на прошлой лекции.