Алгебраическая геометрия 1

07.10.2013
Лекция 5

Регулярные отображения многообразий

Соответствие, сопоставляющее алгебраическому многообразию кольцо функций на нём, играет фундаментальную роль в алгебраической геометрии. Для аффинных многообразий кольцо функций содержит всю информацию о многообразии и, более того, во многих отношениях является более правильным объектом, чем само многообразие. Сегодня мы продолжим это соответствие на отображения многообразий и гомоморфизмы колец и расширим словарь переводов с одного языка на другой.

Определение 1. *Регулярным отображением* алгебраических подмножеств $X \to Y$, где $X \subset \mathbb{A}^n_{\mathsf{k}}$, $Y \subset \mathbb{A}^m_{\mathsf{k}}$, называется отображение вида $\phi(x) = (\phi_1(x), \ldots, \phi_m(x))$, где ϕ_i – регулярные функции на X и $\operatorname{im}\phi \subset Y$. Регулярное отображение называется *изоморфизмом*, если у него есть регулярное обратное отображение. Два алгебраических многообразия *изоморфны*, если между ними есть изоморфизм.

Пример 2.

1. Парабола $y - x^2 = 0$ в $\mathbb{A}^2$ изоморфна $\mathbb{A}^1$, отображения задаются формулами $(x, y) \mapsto x$ и $x \mapsto (x, x^2)$.
2. Проекция кривой $xy = 1$ на ось x – регулярное отображение, его образ – открытое подмножество $D_x = \{x \mid x \neq 0\} \subset \mathbb{A}^1$.
3. Проекция кривой $x^2 + y^2 = 1 \subset \mathbb{C}^2$ на ось x – регулярное отображение, оно сюръективно, прообраз любой точки – одна точка (для $x = \pm 1$) или две точки (для всех остальных).
4. Кривая $X \subset \mathbb{A}^2\colon x^3 - y^2 = 0$ не изоморфна $\mathbb{A}^1$. Отображение $\mathbb{A}^1 \to X$, $t \mapsto (t^2, t^3)$ регулярно и имеет обратное отображение $(x, y) \mapsto y/x$, но оно не регулярно.

Пример 3. Покажем, что кривая $X\colon xy = 1$ не изоморфна аффинной прямой. Действительно, тогда бы $\mathsf{k}[X] \cong \mathsf{k}[x]$. Обратимые элементы в $\mathsf{k}[x]$ – ненулевые константы, а в $\mathsf{k}[X]$ их больше, например, там обратимы x и y.

Пусть $\phi\colon X \to Y$ – регулярное отображение. Оно определяет отображение ϕ^* на кольцах функций в обратную сторону: если $f \in \mathsf{k}[Y]$, то положим $\phi^* f = f \circ \phi$. Это задаёт гомоморфизм

$$\phi^*\colon \mathsf{k}[Y] \to \mathsf{k}[X]$$

колец функций. Отметим, что это *гомоморфизм над* k, т.е. на элементах k имеет $\phi^* = \mathrm{id}$.

Когда кольцо содержит фиксированное поле, обычно говорят об алгебрах над этим полем:

Определение 4. *Алгеброй* над полем k называется кольцо A вместе с гомоморфизмом колец $s_A\colon \mathsf{k} \to A$. *Гомоморфизмом алгебр* из A в B над полем k назыается гомоморфизм колец $f\colon A \to B$ такой, что $f s_A = s_B$.

Посмотрим, как выражаются свойства многообразий в свойствах алгебр функций на них.

Предложение 5. *Пусть* $s\colon \mathsf{k}[Y] \to \mathsf{k}[X]$ *– гомоморфизм алгебр над* k. *Тогда он имеет вид* ϕ^* *для единственного регулярного отображения* $\phi\colon X \to Y$.

Доказательство. Пусть $Y \subset \mathbb{A}^m$, y_i – координатные функции на $\mathbb{A}^m$, а $\bar{y}_i \in \mathsf{k}[Y]$ – их ограничения на Y. Положим

$$\phi(x) = (s(\bar{y}_1)(x), \ldots, s(\bar{y}_m)(x)).$$

Так как $s(\bar{y}_i)$ – регулярные на X функции, то ϕ регулярно по определению. Проверим, что $\operatorname{im}\phi \subset Y$. Пусть $f \in I(Y)$ – многочлен, покажем, что f обнуляется на образе ϕ. Действительно,

$$f(s(\bar{y}_1)(x), \ldots, s(\bar{y}_m)(x)) = s(f(\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_m))(x) = s(0)(x) = 0.$$

Ясно, что $\phi^* = s$ на всех $\bar{y}_i$ и значит, на всей алгебре $\mathsf{k}[Y]$. Ясно также, что ϕ единственно. □

Следствие 6. *Отображение из подмножества* X *в* $\mathbb{A}^n$ *– всё равно, что набор из* n *элементов в* $\mathsf{k}[X]$.

Предложение 7. *Подмногообразия аффинных многообразий соответствуют сюръективным гомоморфизмам алгебр функций.*

Доказательство. Пусть $X \subset Y$ – аффинное подмногообразие. Любая регулярная функция на X – ограничение многочлена с аффинного пространства, а значит, и ограничение регулярной функции с Y. Поэтому имеем сюръекцию $\mathsf{k}[Y] \to \mathsf{k}[X]$ – ограничение.

Обратно, если гомоморфизм $\phi^*\colon \mathsf{k}[Y] \to \mathsf{k}[X]$ сюръективен, пусть I – его ядро. Пусть подмногообразие $X' \subset Y$ – множество нулей всех функций из I. Тогда образ ϕ лежит в X', и если $f \in I(X')$, то $\phi(f) = 0$, поэтому $f \in I$. Значит $I = I(X')$ и для отображения $\psi\colon X \to X'$ имеем $\psi^*\colon \mathsf{k}[X'] = \mathsf{k}[Y]/I \to \mathsf{k}[X]$ – изоморфизм. Получаем, что ψ – изоморфизм, т.е. X – подмногообразие. □

Следствие 8. *Вложение подмножества* X *в* $\mathbb{A}^n$ *– всё равно, что набор из* n *элементов в* $\mathsf{k}[X]$*, порождающий алгебру* $\mathsf{k}[X]$ *над* k.

Пример 9. Пусть $X = \mathbb{A}^1$, $Y = \mathbb{A}^2$, $\phi(t) = (t^2, t^3)$. Тогда $\phi^*(x) = t^2$, $\phi^*(y) = t^3$. Образ ϕ^* – подкольцо $\mathsf{k}[t^2, t^3] \subset \mathsf{k}[t]$, т.е. ϕ^* не сюръективно. Хотя отображение ϕ и инъективно на множестве точек, оно не является вложением подмногообразия – его образ не изоморфен X.

Предложение 10. *Отображение* $\phi\colon X \to Y$ *имеет плотный (в топологии Зарисского) образ* $\iff$ *гомоморфизм* ϕ^* *инъективен.*

Доказательство. Если ϕ^* имеет нетривиальное ядро, возьмём $f \in \mathsf{k}[Y]$, $\phi^* f = 0$. Тогда образ ϕ (а значит, и его замыкание) лежит в алгебраическом подмножестве $\{y \mid f(y) = 0\} \subset Y$, и потому не плотен. Обратно, если $\overline{\operatorname{im}\phi} \neq Y$, то найдётся ненулевая $f \in \mathsf{k}[Y]$ такая, что $f = 0$ на $\phi(Y)$. Значит, ядро ϕ^* нетривиально. □

Пример 11. Пусть $X = Y = \mathbb{A}^2$, $\phi(u, v) = (u, uv)$. Тогда $\phi^*(x) = u, \phi^*(y) = uv$, и ϕ^* инъективен. При этом образ ϕ состоит из точек (x, y), где $x \neq 0$, и точки $(0, 0)$. Он не замкнут и не открыт, но плотен.

Пусть $x \in X$ – точка, а $\phi\colon X \to Y$ – регулярное отображение. Тогда сужение идеала $I_x \subset \mathsf{k}[X]$ при гомоморфизме ϕ^* – это в точности идеал $I_{\phi(x)} \subset \mathsf{k}[Y]$. Вообще, если $Z \subset X$ – замкнутое подмногообразие и $I(Z) \subset \mathsf{k}[X]$ – его идеал, то $I(Z)^c = I(\phi(Z)) \subset \mathsf{k}[Y]$. (Хотя подмножество $\phi(Z)$ может и не быть алгебраическим, ничто не мешает рассмотреть его идеал. Также можно рассмотреть заменить его на его замыкание $\overline{\phi(Z)}$.) Это проясняет геометрический смысл сужения идеалов при гомоморфизме колец: сужение соответствует взятию образа при регулярном отображении.

В частности, получается, что для колец вида $\mathsf{k}[X]$ с алгебраически замкнутым полем k сужение любого максимального идеала при любом гомоморфизме – снова максимальный идеал.

Среди всех колец на кольца функций на алгебраических многообразиях больше всего похожи конечно порождённые алгебры над полем. Всякая такая алгебра есть факторалгебра кольца многочленов по некоторому идеалу. Рассмотрим их поближе.

Определение 12. Пусть $\mathfrak{m} \subset A$ – максимальный идеал. *Полем вычетов* идеала $\mathfrak{m}$ называется поле $\mathsf{k}(\mathfrak{m}) = A/\mathfrak{m}$.

Пример 13. Если $\mathfrak{m} = I_{\bar{a}} \subset \mathsf{k}[x_1, \ldots, x_n]$ – идеал точки, то $\mathsf{k}(\mathfrak{m}) = \mathsf{k}$.

Определение 14. Поле L – *конечное расширение* поля k, если $\mathsf{k} \subset L$ и L – конечномерное векторное пространство над k. Размерность этого векторного пространства называется *размерностью* расширения.

Пример 15. $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$, $\mathbb{C}(t^3) \subset \mathbb{C}(t)$, любые расширения конечных полей – конечные. Расширение $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ – не конечное.

Пусть кольцо A конечно порождено над некоторым полем k и $\mathfrak{m} \subset A$ – максимальный идеал. Тогда поле вычетов $\mathsf{k}(\mathfrak{m})$ – конечное расширение k. Это вытекает из следующей теоремы.

Теорема 16 (алгебраическая версия теоремы Гильберта о нулях)**.** *Пусть A – конечно порождённая алгебра над полем k. Предположим, что A – поле. Тогда A – конечное расширение поля k.*

Следствие 17. *Пусть алгебра A конечно порождена над некоторым полем k и $\mathfrak{m} \subset A$ – максимальный идеал. Тогда поле вычетов $\mathsf{k}(\mathfrak{m})$ – конечное расширение k.*

Доказательство. Алгебра $\mathsf{k}(\mathfrak{m})$ также конечно порождена над k, и можно применить теорему. □

Следствие 18. *Если вдобавок к предыдущему поле k алгебраически замкнуто, то $\mathsf{k}(\mathfrak{m}) = \mathsf{k}$.*

Следствие 19 (геометрическая версия теоремы о нулях)**.** *Если поле k алгебраически замкнуто, то все максимальные идеалы кольца $\mathsf{k}[x_1, \ldots, x_n]$ имеют вид $I_{\bar{a}}$, где $\bar{a} \in \mathbb{A}^n_{\mathsf{k}}$.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{m}$ максимален. Имеем изоморфизм $s\colon \mathsf{k}[x_1, \ldots, x_n]/\mathfrak{m} \to \mathsf{k}$. Пусть $s(x_i) = a_i \in \mathsf{k}$. Тогда $s(x_i - a_i) = 0$ и $x_i - a_i \in \mathfrak{m}$. Значит, в силу максимальности $\mathfrak{m} = I_{(a_1, \ldots, a_n)}$. □