Алгебраическая геометрия 1

25.11.2013
Лекция 11

Конечно порождённые и нётеровы модули и кольца

Завершая разговор о локализации, получим наконец от неё пользу – докажем сформулированное ещё на первой лекции

Предложение 1. *Нильрадикал кольца равен пересечению всех его простых радикалов.*

Доказательство. Вложение нильрадикала в любой простой идеал было доказано, покажем обратное. Пусть $a \in A$ – не нильпотентный элемент, покажем, что он не входит в некоторый простой идеал в A. Для этого рассмотрим локализацию A_a и любой максимальный идеал $\mathfrak{m}$ в ней (они существуют). Его сужение $\mathfrak{m}^c \subset A$ будет простым идеалом и не будет содержать элементов из системы, по которой локализовали. В частности, $a \notin \mathfrak{m}^c$. □

Теперь вновь обратимся к модулям.

Определение 2. Модуль M называется *конечно порождённым*, если он порождён конечным числом своих элементов $m_1, \ldots, m_n$.

Следующие свойства предлагается проверить самостоятельно.

Предложение 3.

1. *Покажите, что модуль M конечно порождён $\iff$ существует сюръекция $A^n \to M$.*

   Пусть $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ – точная последовательность модулей.

2. *Если M' и M'' конечно порождены, то и M конечно порождён.*
3. *Если M конечно порождён, не обязательно оба модуля M' и M'' конечно порождены.*
4. *Модули M и N конечно порождены $\iff$ $M \oplus N$ конечно порождён.*

Пример 4.

1. Для $A = \mathbb{Z}$ или $\mathsf{k}[x]$ (или любого кольца главных идеалов) любой подмодуль в A-модуле A порождён одним элементом.
2. Если A – поле, то конечно порождённые модули – это конечномерные векторные пространства над k и число элементов в любом минимальном семействе образующих одинаково.
3. Как $\mathbb{Z}$-модуль, поле $\mathbb{Q}$ не конечно порождено.

Определение 5. Модуль M над кольцом A называется *нётеровым*, если все его подмодули конечно порождены.

Предложение 6. *Пусть $0 \to M' \to M \xrightarrow{g} M'' \to 0$ – точная последовательность модулей.*

1. *Модули M' и M'' нётеровы $\iff$ модуль M нётеров.*
2. *Подмодуль и фактормодуль нётерова модуля нётеровы.*
3. *Модули M и N нётеровы $\iff$ $M \oplus N$ нётеров.*

Доказательство. 1. Пусть M нётеров. Тогда любой подмодуль в M' есть подмодуль и в M и потому конечно порождён. Если $N \subset M''$ – подмодуль, то подмодуль $g^{-1}(N) \subset M$ конечно порождён, значит и N конечно порождён как фактормодуль $g^{-1}(N)$.

Обратно, пусть M' и M'' нётеровы. Пусть $N \subset M$ – подмодуль. Рассмотрим точную последовательность $0 \to M' \cap N \to N \to g(N) \to 0$. В ней подмодули $M' \cap N \subset M'$ и $g(N) \subset M''$ конечно порождены. Значит, по предложению 3.2 модуль N тоже конечно порождён.

2. и 3. следуют сразу из 1., в 3. нужно рассмотреть точную последовательность $0 \to M \to M \oplus N \to N \to 0$. □

Пример 7. Приведём пример конечно порождённого не нётерова модуля. Рассмотрим кольцо $A = \mathbb{R}[x_1, x_2, \ldots]$ многочленов от бесконечного числа переменных. (Заметим, что многочлен – это конечное выражение, так что каждый многочлен по отдельности зависит только от конечного числа переменных.) В нём есть идеал $I = (x_1, x_2, \ldots)$, который нельзя породить конечным числом многочленов. При этом I – подмодуль в модуле A, который порождён одним элементом 1. Стало быть, A – конечно порождённый, но не нётеров модуль.

Кольца, в которых такое невозможно, называются нётеровыми – в честь Эмми Нётер. В алгебраической геометрии все возникающие кольца нётеровы, чего нельзя сказать о геометрии вообще, см. примеры ниже.

Определение 8.

1. Кольцо A называется *нётеровым*, если все его идеалы конечно порождены.
2. Кольцо A называется *нётеровым*, если любая возрастающая цепочка его идеалов $I_1 \subset I_2 \subset \ldots$ стабилизируется, т.е. найдётся такое n, что $I_n = I_{n+1} = I_{n+2} = \ldots$
3. Кольцо A называется *нётеровым*, если любой конечно порождённый A-модуль нётеров.

Предложение 9. *Данные три определения нётерова кольца равносильны.*

Доказательство. $1 \Rightarrow 2$. Пусть $I_1 \subset I_2 \subset \ldots$ – цепочка идеалов и $I = \cup I_k$. Тогда I – тоже идеал в A, пусть он порождён элементами $a_1, \ldots, a_n$. Каждый a_i содержится в некотором идеале I_{k_i}, пусть $I_N = I_{k_i}$ – тот из них, чей номер наибольший. Он содержит все a_i, а значит $I_N \supset I$ и $I_N = I_{N+1} = \ldots$.

$2 \Rightarrow 1$. Пусть $I \subset A$ – идеал. Будем строить последовательность элементов в I по индукции. Если $x_1, \ldots, x_n$ построены и $I_n = (x_1, \ldots, x_n) \neq I$, выберем произвольный $x_{n+1} \in I \setminus I_n$. Тогда либо на каком-то шаге получим $I_n = I$, откуда I конечно порождён, либо получим бесконечную строго возрастающую цепочку идеалов $I_1 \subset I_2 \subset \ldots$, что противоречит условию.

$1 \Rightarrow 3$. Если M – конечно порождённый A-модуль, то существует сюръекция $A^n \to M$ при некотором n. Условие 1 означает, что A-модуль A нётеров. По предложению 6.3 модуль A^n нётеров, по предложению 6.2 модуль M также нётеров.

$3 \Rightarrow 1$. Рассмотреть конечно порождённый A-модуль A. □

Пример 10. 1. Любое поле – нётерово кольцо.

2. Любое кольцо главных идеалов нётерово.

3. Кольцо $\mathbb{R}[x_1, x_2, \ldots]$ не нётерово.

4. Ещё пример не нётерова кольца: кольцо непрерывных функций на отрезке $[0,1]$. В нём есть строго возрастающие цепочки идеалов $I_1 \subset I_2 \subset \ldots$, где $I_k = (x^{1/k})$ или I_k – множество функций, равных нулю на $[0, 1/k]$.

Однако большинство встречающихся в алгебраической геометрии колец нётеровы. Для того, чтобы это проверить, нужна

Лемма 11. *Пусть A – нётерово кольцо. Тогда кольцо $A[x]$ тоже нётерово.*

Доказательство. Пусть $I \subset A[x]$ – идеал, построим в I конечную систему образующих.

Положим $I_k = \{a \in A \mid \exists f = ax_k + \ldots \in I, \deg f = k\}$, это идеалы в A. Притом $I_k \subset I_{k+1}$: если $f = ax_k + \ldots \in I$ имеет степень k, то $xf = ax_{k+1} + \ldots \in I$ имеет степень $k+1$. Цепочка идеалов I_k стабилизируется на некотором идеале $I_N = \cup_k I_k$. Он конечно порожден элементами $a_1, \ldots, a_n$, так как A нётерово. Выберем многочлены $p_i = a_i x^N + \ldots \in I_N$ степени N. Рассмотрим A-модуль $M = \{f \in I \mid \deg f < N\}$, это подмодуль в $\{f \mid \deg f < N\} \cong A^N$. По третьему определению нётерового кольца, M конечно порождён элементами $p'_1, \ldots, p'_m$.

Покажем, что I порождён $p_1, \ldots, p_n, p'_1, \ldots, p'_m$. Пусть $p \in I$, ведём индукцию по $d = \deg p$. Если $\deg p < N$, то $p \in M$ и поэтому выражается через p'_i с коэффициентами в A. Если $\deg p = d \geqslant N$ и $p = ax^d + \ldots$, то $a \in I_d = I_N$, поэтому $a = \sum a_i c_i$, где $c_i \in A$. Тогда многочлен $\bar{p} = x^{d-N} \sum c_i p_i = ax^d + \ldots$ порождён p_i и $\deg(p - \bar{p}) < d$, по предположению индукции $p - \bar{p}$ выражается через p_i и p'_j. □

В качестве следствия получаем

Теорема 12 (Гильберта о базисе)**.** *Кольцо многочленов $\mathsf{k}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ над полем от нескольких переменных нётерово.*

Доказательство. Индукция по n. □

Чтобы разобраться с нётеровостью остальных колец, покажем, что конечная порождённость идеалов сохраняется при факторизации и локализации.

Предложение 13. *Факторкольцо нётерова кольца нётерово. Локализация нётерова кольца нётерова.*

Доказательство. Будем использовать второе определение нётеровости, через цепочки возрастающих идеалов. Идеалы в A/I – это всё равно, что идеалы в A, содержащие I, поэтому стабилизация цепочки идеалов в A влечёт стабилизацию цепочки идеалов в A/I.

А идеалы в $S^{-1}A$ – это всё равно, что идеалы в A, являющиеся сужениями идеалов из $S^{-1}A$. Стабилизация цепочки идеалов в $S^{-1}A$ сразу следует из стабилизации её сужения в A. □

Отсюда сразу получается

Следствие 14. *Следующие кольца нётеровы:*

1. *Любое конечно порождённое кольцо над полем или над $\mathbb{Z}$.*

2. *Кольцо функций на любом аффинном алгебраическом многообразии.*

3. *Любая локализация конечно порождённого кольца над полем.*

4. *Локализация кольца функций на любом аффинном алгебраическом многообразии.*

5. *Локальное кольцо неприводимого подмногообразия в любом аффинном алгебраическом многообразии.*

Замечание 15. Обратите внимание, что подкольцо нётерова кольца может не быть нётеровым: любое кольцо без делителей нуля вкладывается в своё поле частных, которое нётерово.

Скажем теперь немного о геометрическом смысле локализации. Используя двойственность между идеалами в кольце регулярных функций на многообразии и подмногообразиями, получаем:

Предложение 16. *Любая убывающая цепочка вложенных подмногообразий алгебраического многообразия стабилизируется.*

Следствие 17. *Любое алгебраическое многообразие есть объединение конечного числа неприводимых подмногообразий.*

Доказательство. Если многообразие приводимо, предствим его как объединение двух меньших подмногообразий. Если среди них снова есть приводимые, представим их в виде объединения меньших подмногообразий, и т.д. Либо мы получим бесконечно убывающую цепочку вложенных подмногообразий, что противоречит предложению 16, либо этот процесс оборвётся на каждой ветке, и получится разложение в объединение конечного числа неприводимых подмногообразий. ☐

До сих пор, изучая модули, мы имели дело с одним фиксированным кольцом. Однако важно понимать, что происходит, когда это кольцо меняется. Иными словами, когда задан гомоморфизм колец $\phi\colon A \to B$ (такая ситуация называется *расширением скаляров* или *заменой базы*). В этом случае определены два функтора на модулях: сужение скаляров и расширение скаляров. А именно, если N – B-модуль, то N можно рассматривать и как A-модуль с умножением $a \cdot n = \phi(a)n$ (т.е. множество скаляров сузилось до A). Если же M – A-модуль, можно рассмотреть B-модуль $B \otimes_A M$ с умножением $b \cdot (b' \otimes M) = bb' \otimes m$ (тем самым, множество скаляров расширилось до B).

Впрочем, речь сейчас пойдёт не о них, а о разных условиях конечности на гомоморфизм $\phi\colon A \to B$. Будем для простоты предполагать, что ϕ – вложение, т.е. что $A \subset B$, и говорить о расширении колец. Аналогичные условия для произвольного гомоморфизма сводятся к этому частному случаю переходом к вложению $\phi(A) \subset B$.

Определение 18. Кольцо B называется *конечно порождённым* над подкольцом $A \subset B$, если оно конечно порождено как кольцо: т.е. существуют элементы $b_1, \ldots, b_n$, для которых любой элемент в B записывается в виде многочлена от b_i с коэффициентами в A.

Определение 19. Кольцо B называется *конечным* над подкольцом $A \subset B$, если оно конечно порожденно как модуль: т.е. существуют элементы $b_1, \ldots, b_n$, для которых любой элемент в B записывается в виде линейной комбинации b_i с коэффициентами в A.

Конечно, конечное кольцо конечно порождено.

Пример 20.

1. В случае полей конечные расширения уже были нами рассмотрены.
2. Расширения $\mathbb{Z}[x^5] \subset \mathbb{Z}[x]$, $\mathbb{C}[f(x), g(y)] \subset \mathbb{C}[x, y]$ конечны.
3. Расширения $\mathbb{C} \subset \mathbb{C}[x], \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ не конечны. При этом расширение $\mathbb{C} \subset \mathbb{C}[x]$ конечно порождено, а $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ – нет.

Предложение 21. *Пусть $A \subset B$ и $B \subset C$ – конечные расширения колец, тогда и расширение $A \subset C$ конечно.*

Доказательство. Полностью аналогично доказательству конечности башни конечных расширений полей. $\square$

Определение 22. Пусть $A \subset B$ – кольца и $x \in B$. Элемент x называется *целым* над A, если при некоторых $a_i \in A$ выполнено

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0.$$

Пример 23. Элемент $x \in \mathbb{Q}$ цел над $\mathbb{Z} \iff x \in \mathbb{Z}$. Числа $i, \sqrt{2}, \sqrt{-3} \in \mathbb{C}$ целы над $\mathbb{Z}$.

Замечание 24. Если A – поле, то это определение равносильно определению алгебраического элемента, так как на старший член в полиномиальном соотношении всегда можно поделить. В общем же случае определение целого элемента сильнее, что показывает предыдущий пример.