

Спектр кольца

Задача 1. Опишите спектр кольца $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Задача 2. Опишите спектр кольца $\mathbb{R}[x]$.

Задача 3. Опишите спектр кольца $\{a/b \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 3\}$.

Задача 4. Придумайте кольцо, у которого ровно 7 простых идеалов.

Задача 5. Покажите, что $\text{Spec}(A \times B)$ есть объединение двух открыто-замкнутых непесекающихся подмножеств, гомеоморфных $\text{Spec}(A)$ и $\text{Spec}(B)$.

Задача 6. Пусть $x, y \in \text{Spec}(A)$ – точки, а $\mathfrak{p}, \mathfrak{q} \subset A$ – соответствующие простые идеалы. Докажите, что:

а) Множество $\overline{\{x\}}$ замкнуто $\iff \mathfrak{p}$ максимален.

б) Замыкание $\overline{\{x\}}$ есть $V(\mathfrak{p})$.

в) $y \in \overline{\{x\}} \iff \mathfrak{p} \subset \mathfrak{q}$.

Задача 7. Покажите, что

$$D_{fg} = D_f \cap D_g;$$

$$D_f = \emptyset \iff f \text{ – нильпотент};$$

$$D_f = \text{Spec}(A) \iff f \text{ обратим};$$

Задача 8. Покажите, что радикал идеала – идеал.

Задача 9. а) Покажите, что $r(r(I)) = r(I)$.

б) Покажите, что $r(\mathfrak{p}) = \mathfrak{p}$ для простого идеала \mathfrak{p} . Верно ли обратное?