

Гомоморфизмы колец

Задача 1. Докажите, что для сюръективного гомоморфизма $f: A \rightarrow B$ отображение ограничения устанавливает взаимно-однозначное соответствие между идеалами в B и идеалами в A , содержащими $\ker f$.

Задача 2. Для гомоморфизма вложения $\mathbb{R}[x] \rightarrow \mathbb{C}[x]$ найдите ограничения идеалов $(x-i)$, $(x-2-3i)$.

Задача 3. Найдите ограничения идеалов (x^2) , $(x-1)$, $(x+1)$ для гомоморфизма $\mathbb{R}[x, y] \rightarrow \mathbb{R}[x]$, $p(x, y) \mapsto p(x, x^2)$.

Задача 4. Что есть прообраз множества $D_a \subset \text{Spec}(A)$ при отображении f^* ?

Задача 5. Найдите расширение идеала $(x-a, y-b)$ при гомоморфизме $f: \mathbb{C}[x, y] \rightarrow \mathbb{C}[z]$, $p(x, y) \mapsto p(z, z)$.

Задача 6. Найдите расширения идеалов $(y-1)$, $(x-y)$, $(2x-y-1)$ для гомоморфизма $\mathbb{R}[x, y] \rightarrow \mathbb{R}[x]$, $p(x, y) \mapsto p(x, x^2)$.

Задача 7. Проверьте, что

1. $I \subset J \Rightarrow I^e \subset J^e$;
2. $(I \cap J)^e \subset I^e \cap J^e$;
3. $I^e + J^e = (I + J)^e$.

Задача 8. Пусть $f: A \rightarrow B$ – гомоморфизм, C – множество идеалов A , являющихся сужениями, а E – множество идеалов в B , являющихся расширениями. а) Покажите, что

$$C = \{I \mid I^{ec} = I\}, \quad E = \{J \mid J^{ce} = J\}.$$

б) Проверьте, что отображения расширения и сужения – взаимно обратные биекции между C и E .

Задача 9. Покажите, что $r(J)^c = r(J^c)$ и $r(I)^e \subset r(I^e)$.