Алгебраическая
геометрия 1

30.09.2013
Листок 4

Аффинные алгебраические многообразия

Задача 1. a) Докажите, что для любых идеалов $I_1, I_2 \subset \mathsf{k}[x_1, \dots, x_n]$ и любых алгебраических подмножеств $Y_1, Y_2 \subset \mathbb{A}^n$ верно

1. $V(I_1 + I_2) = V(I_1) \cap V(I_2)$,
2. $V(I_1 \cap I_2) = V(I_1) \cup V(I_2)$,
3. $I(Y_1 \cup Y_2) = I(Y_1) \cap I(Y_2)$.

b) Приведите пример, показывающий, что равенства $I(Y_1 \cap Y_2) = I(Y_1) + I(Y_2)$ может не быть.

Задача 2. Рассмотрим подмножество X в $\mathbb{C}^3$, заданное уравнениями

$$x_1x_2 - x_3^2 = x_3 - \lambda(x_1 + x_2) = 0,$$

где $\lambda \in \mathbb{C}$ – некоторый параметр.

a) Разложите его в объединение неприводимых подмножеств X_i. Нарисуйте картинку.

b) Найдите идеалы I_i каждого из них.

c) Верно ли, что $(x_1x_2 - x_3^2, x_3 - \lambda(x_1 + x_2)) = \cap I_i$?

Задача 3. Рассмотрим подмножество X в $\mathbb{C}^4$, заданное уравнениями

$$x_1x_4 - x_2x_3 = x_1x_3 - x_2^2 = 0.$$

a) Разложите его в объединение неприводимых подмножеств X_i.

b) Найдите идеалы I_i каждого из них.

c) Верно ли, что $(x_1x_4 - x_2x_3, x_1x_3 - x_2^2) = \cap I_i$?

Задача 4. Рассмотрим подкольцо в $\mathbb{C}[x, y]$, порождённое всеми мономами x^ay^b с $b \leqslant 2a$.

a) Покажите, что оно является кольцом регулярных функций на некотором алгебраическом многообразии.

b) Найдите это многообразие и его идеал.

Задача 5. Рассмотрим подкольцо в $\mathbb{C}[x, y]$, порождённое всеми мономами x^ay^b с $b \leqslant \sqrt{2}a$. Покажите, что оно не является кольцом регулярных функций на алгебраическом многообразии.

Задача 6. Рассмотрим подкольцо в $\mathbb{C}[t]$, порождённое всеми мономами t^a с a) $a \geqslant 2$; b) $a \geqslant 3$. Покажите, что оно является кольцом регулярных функций на алгебраическом многообразии. Найдите это многообразие и его идеал.

Задача 7 (конус над скрученной кривой). Рассмотрим подкольцо в $\mathbb{C}[x, y]$, порождённое всеми мономами x^ay^b с $a + b \,\vdots\, 3$.

a) Покажите, что оно является кольцом регулярных функций на алгебраическом многообразии.

b) Докажите, что это многообразие изоморфно образу отображения $\sigma\colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^4, \sigma(x, y) = x^3, x^2y, xy^2, y^3$.

c) Найдите идеал этого многообразия.

Задача 8. Пусть $I \subset \mathsf{k}[x_1, \dots, x_n]$ – простой идеал. Верно ли, что множество $V(I) \subset \mathbb{A}^n_{\mathsf{k}}$ неприводимо?