

Расширения полей

Задача 1. У алгебраически замкнутых полей нет конечных расширений, кроме тривиального.

Задача 2. Покажите, что числа а) $\sqrt{2} + \sqrt{7}$, б) $\sqrt[3]{2} + \sqrt{3}$, в) $\sqrt{2} + \sqrt[4]{-2}$ алгебраичны над \mathbb{Q} . Найдите их степени.

Подсказка: какова может быть степень расширения $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}] \cap \mathbb{Q}[\sqrt{3}]$?

Задача 3. а), б), в) Найдите их минимальные многочлены.

Задача 4. Найдите степени элементов а) $u^2 + 1, 1/(u + 1)$ в расширении $\mathbb{C}(u^3) \subset \mathbb{C}(u)$; б) $u + v, uv$ в расширении $\mathbb{C}(u^3, v^3) \subset \mathbb{C}(u, v)$.

Задача 5. а), б) Найдите их минимальные многочлены.

Задача 6. Найдите степень поля, полученного присоединением корней многочлена $x^4 + 4$ к \mathbb{Q} .

Задача 7. а) Пусть $k \subset L$ – расширение полей, $\alpha, \beta \in L$ – алгебраические элементы. Тогда расширение $k[\alpha, \beta] \supset k$ конечно и $[k[\alpha, \beta] : k] \leq \deg \alpha \cdot \deg \beta$. б) Элементы $\alpha \pm \beta, \alpha\beta, \alpha/\beta$ алгебраичны над k .

Задача 8. Пусть $C \subset \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2$ – неприводимая кривая, заданная как множество нулей многочлена $f \in \mathbb{C}[x, y]$. Покажите, что расширения полей $\mathbb{C}(x) \subset \mathbb{C}(C)$ и $\mathbb{C}(y) \subset \mathbb{C}(C)$ конечны, найдите их степени.