

Точные последовательности

Задача 1. а), б) Покажите, что для любого модуля N точны последовательности

$$0 \rightarrow \text{Hom}(N, M') \xrightarrow{\bar{f}} \text{Hom}(N, M) \xrightarrow{\bar{g}} \text{Hom}(N, M'')$$

и

$$0 \rightarrow \text{Hom}(M'', N) \xrightarrow{\bar{g}} \text{Hom}(M, N) \xrightarrow{\bar{f}} \text{Hom}(M', N),$$

полученные из короткой точной последовательности $0 \rightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \rightarrow 0$.

Задача 2. Покажите, что для модуля P следующие условия равносильны:

1. для любой точной последовательности $\dots \rightarrow M^{i-1} \rightarrow M^i \rightarrow M^{i+1} \rightarrow \dots$ точна последовательность

$$\dots \rightarrow \text{Hom}(P, M^{i-1}) \rightarrow \text{Hom}(P, M^i) \rightarrow \text{Hom}(P, M^{i+1}) \rightarrow \dots;$$

2. для любой точной последовательности $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$ точна последовательность

$$0 \rightarrow \text{Hom}(P, M') \rightarrow \text{Hom}(P, M) \rightarrow \text{Hom}(P, M'') \rightarrow 0;$$

3. для любого сюръективного гомоморфизма $g: M \rightarrow M''$ гомоморфизм $\text{Hom}(P, M) \rightarrow \text{Hom}(P, M'')$ сюръективен.

Такие модули называются *проективными*.

Задача 3. Покажите, что для модуля I следующие условия равносильны:

1. для любой точной последовательности $\dots \rightarrow M^{i-1} \rightarrow M^i \rightarrow M^{i+1} \rightarrow \dots$ точна последовательность

$$\dots \leftarrow \text{Hom}(M^{i-1}, I) \leftarrow \text{Hom}(M^i, I) \leftarrow \text{Hom}(M^{i+1}, I) \leftarrow \dots;$$

2. для любой точной последовательности $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$ точна последовательность

$$0 \leftarrow \text{Hom}(M', I) \leftarrow \text{Hom}(M, I) \leftarrow \text{Hom}(M'', I) \leftarrow 0;$$

3. для любого инъективного гомоморфизма $f: M' \rightarrow M$ гомоморфизм $\text{Hom}(M, I) \rightarrow \text{Hom}(M', I)$ сюръективен.

Такие модули называются *инъективными*.

Задача 4. Пусть

$$M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \rightarrow 0$$

– последовательность модулей и гомоморфизмов. Покажите, что она точна \iff для любого модуля N точна последовательность

$$0 \rightarrow \text{Hom}(M'', N) \xrightarrow{\bar{g}} \text{Hom}(M, N) \xrightarrow{\bar{f}} \text{Hom}(M', N).$$

Задача 5. Пусть

$$0 \rightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''$$

– последовательность модулей и гомоморфизмов. Покажите, что она точна \iff для любого модуля N точна последовательность

$$0 \rightarrow \text{Hom}(N, M') \xrightarrow{\bar{f}} \text{Hom}(N, M) \xrightarrow{\bar{g}} \text{Hom}(N, M'').$$